小学数学 计算

秘籍

六年级

学而思研发中心 编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

小学数学计算秘籍. 六年级/学而思研发中心编著. —北京:电子工业出版社,2014. 11
ISBN 978-7-121-24408-7

Ⅰ. ①小…　Ⅱ. ①学…　Ⅲ. ①小学数学课—习题集　Ⅳ. ①G624. 505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 222320 号

策划编辑:蔡　葵
责任编辑:蔡　葵
印　　刷:
装　　订:
出版发行:电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本:787 ×1 092　1/16　印张:6. 75　字数:165. 4 千字
版　　次:2014 年 11 月第 1 版
印　　次:2016 年 1 月第 3 次印刷
定　　价:28. 80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换. 若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888.

质量投诉请发邮件至 zlts@ phei. com. cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@ phei. com. cn.

服务热线:(010)88258888.

学而思图书策划委员会

主　　编　张邦新

执行主编　韩春成　王朝立

编　　著　学而思研发中心

赵永明　马　宁　李　杰　张　慧　郭忠秀　李春军　丁海龙

邓美荣　闫　娜　胡　浩　赵璞铮　崔梦迪　韩春成

前　　言

从《小学数学计算秘籍》系列丛书开始酝酿到着手编写，学而思研发中心集思广益，进行了广泛调研，听取了广大学生和家长的需求，采纳了众多一线教师的建议，在制定大纲后对编写大纲进行了反复修改，并邀请一线名师参与丛书的编写，确保图书质量。

《小学数学计算秘籍》系列丛书共六册，一至六年级每年级一册，从基础知识入手，着重于归纳秘籍。从课本的计算知识引申到数学思维，不局限于教材内容，有利于培养学生的发散思维，拓宽知识面，更好地理解数学，更快、更有效地学习数学。

《小学数学计算秘籍》系列丛书具有以下特色。

1. 权威团队

本丛书汇集了学而思众多名师多年的教学沉淀。在解题方法方面，注重从基础上升到方法、技巧。书中对经典例题解释透彻，注重一题多解、多题一解、横向发散、纵向变通。

2. 视频讲解

本丛书采用了国内教辅市场新的教学形式——视频教学。我们将书中的部分例题录制成网络高清讲解视频，同学们可以通过直播和录播两种途径观看视频，方便同学们更直观地进行学习。同学们可通过书中的防伪码登录 http://zt.xueersi.com/xiaoshujs6 进行观看。

3. 论坛互动

同学们只需登录论坛 http://book.eduu.com/peiyou，单击《小学数学计算秘籍（六年级）》“新书答疑”按钮，即可实现与老师互动、与同学们交流心得体会，以解决在使用《小学数学计算秘籍（六年级）》一书时所遇到的问题。

4. QQ 答疑

我们为同学们建立了答疑 QQ 群，方便与编写老师进行及时的沟通和交流互动。同学们可通过 QQ 加入 QQ 群“学而思书籍服务群”，QQ 群号为 324414614。

除《小学数学计算秘籍》系列图书外，学而思研发中心还同步推出《小学数学课内培优跟踪练习册》系列辅导丛书，给同学们提供全方位的学习指导。

在本书编写过程中，我们征求了全国各地老师和教研人员的意见，在此表示衷心的感谢。

我们虽秉承着“打造精品书籍，让学生高效学习”的精神编写此书，但百密一疏，不妥之处在所难免。同学们在使用本书过程中如发现任何问题或者提出改善性意见，均可与我们联系。

联系方式：xiaoxueshuji@100tal.com

学而思研发中心

目录

第1讲　分数的运算技巧（1）

秘籍导航

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$ 是乘法分配律。反过来，如果已知 $a\times c+b\times c$，可以得出 $a\times c+b\times c=(a+b)\times c$，因为 c 是乘法算式 $a\times c$ 与 $b\times c$ 中公有的因数，所以乘法分配律的逆向应用也叫提取公因数，本讲学习用提取公因数的方法巧算分数乘加乘、乘减乘型计算题。

秘籍攻略

秘籍 1　乘法分配律的灵活运用

例 1　（1）计算 $\left(\frac{8}{9}+\frac{4}{27}\right)\times 27$

分析　按照乘法分配律，$\frac{8}{9}$ 和 $\frac{4}{27}$ 先分别与 27 相乘，两个乘积都是整数，达到凑整的目的，计算变得简单。

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{8}{9}\times 27+\frac{4}{27}\times 27\\
&=24+4\\
&=28
\end{aligned}
$$

（2）计算 $\left(1\frac{2}{3}-0.875+\frac{1}{4}\right)\times 24$

分析　括号内是分数小数混合计算，如果按照运算顺序先把括号内的结果算出来再乘以 24，计算将很繁琐。如果用乘法分配律计算将变得简单巧妙。

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{8}+\frac{1}{4}\right)\times 24\\
&=\frac{5}{3}\times 24-\frac{7}{8}\times 24+\frac{1}{4}\times 24\\
&=40-21+6\\
&=25
\end{aligned}
$$

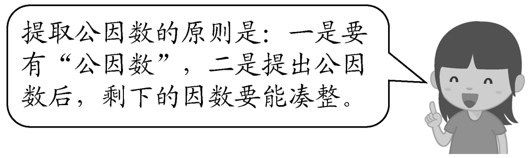
秘籍 2　直接提取公因数

例 2　（1）计算 $\frac{5}{6}\times\frac{5}{9}+\frac{5}{9}\times\frac{1}{6}$

分析　观察发现两个乘法算式中都有一个相同的因数 $\frac{5}{9}$，提出公有的因数 $\frac{5}{9}$ 后把剩下的两个因数 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{1}{6}$ 相加，提出的公因数 $\frac{5}{9}$ 写在括号外，把剩下的两个因数 $\frac{5}{6}$ 和

$\frac{1}{6}$写在括号里，$\frac{5}{6}$加$\frac{1}{6}$得整数1。

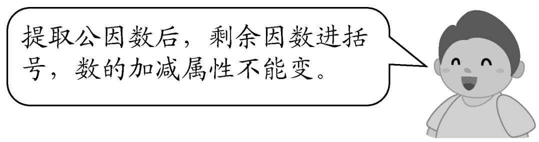
$$\begin{aligned}原式&=\frac{5}{9}\times\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{5}{9}\times1\\&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$



（2）计算 $20\times\frac{4}{7}-6\times\frac{4}{7}$

分析 提取两个乘法算式中公有的因数$\frac{4}{7}$，提出公有的因数$\frac{4}{7}$后剩下的两个因数20和6相减，20减6的差是14，$14\times\frac{4}{7}$计算比较简便。

$$\begin{aligned}原式&=\frac{4}{7}\times(20-6)\\&=\frac{4}{7}\times14\\&=8\end{aligned}$$



（3）计算 $1\frac{3}{5}\times\frac{7}{9}-\frac{7}{9}\times60\%$

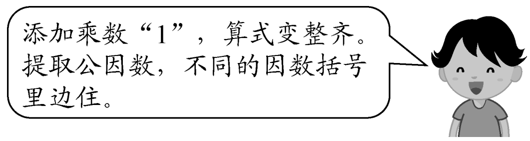
分析 观察两个乘法算式，显然都有因数$\frac{7}{9}$，提出公因数$\frac{7}{9}$后剩下的两个因数相减，剩下的两个因数 $1\frac{3}{5}=1.6$，$60\%=0.6$，$1\frac{3}{5}-60\%=1.6-0.6=1$。

$$\begin{aligned}原式&=1.6\times\frac{7}{9}-\frac{7}{9}\times0.6\\&=\frac{7}{9}\times(1.6-0.6)\\&=\frac{7}{9}\times1\\&=\frac{7}{9}\end{aligned}$$

（4）计算$\frac{7}{8}\times7+\frac{7}{8}$

分析 先添加乘数1，把$\frac{7}{8}$写成$\frac{7}{8}\times1$，之后再提取公因数$\frac{7}{8}$。

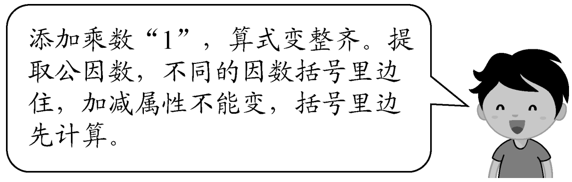
$$\begin{aligned}原式&=\frac{7}{8}\times7+\frac{7}{8}\times1\\&=\frac{7}{8}\times(7+1)\\&=\frac{7}{8}\times8\\&=7\end{aligned}$$



（5）计算$\frac{5}{7}-\frac{2}{9}\times\frac{5}{7}$

分析 先添加乘数1，把$\frac{5}{7}$转化成$\frac{5}{7}\times1$，之后再提取公因数$\frac{5}{7}$。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{5}{7}\times1-\frac{2}{9}\times\frac{5}{7}\\&=\frac{5}{7}\times\left(1-\frac{2}{9}\right)\\&=\frac{5}{7}\times\frac{7}{9}\\&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$



秘籍3　先转化再提取公因数

例3 （1）计算$0.125\times\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\times8.25+12.5\%$

分析 $\frac{1}{8}=0.125=12.5\%$，可见三个因数0.125，$\frac{1}{8}$，12.5%只是数的表现形式不同，数值上是相等的，所以可以先把它们都统一成分数形式，然后再提取公因数。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{8}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\times8\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times1\\&=\frac{1}{8}\times\left(\frac{3}{4}+8\frac{1}{4}+1\right)\\&=\frac{1}{8}\times10\\&=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

（2）计算$\frac{9}{20}\times6.4+3.6\div2\frac{2}{9}$

分析 除以一个数等于乘以这个数的倒数，先把$2\frac{2}{9}$化成假分数，再把除法转化为乘法。$3.6\div2\frac{2}{9}=3.6\div\frac{20}{9}=3.6\times\frac{9}{20}$。之后再提取公因数$\frac{9}{20}$。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{9}{20}\times6.4+3.6\div\frac{20}{9}\\&=\frac{9}{20}\times6.4+3.6\times\frac{9}{20}\\&=\frac{9}{20}\times(6.4+3.6)\\&=\frac{9}{20}\times10\\&=4.5\end{aligned}$$

(3) 计算 $3\div4\times4\frac{1}{7}+0.75\times3\frac{6}{7}$

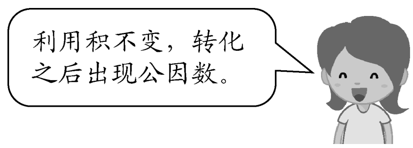
分析 $3\div4=\frac{3}{4}$；而 $0.75=\frac{3}{4}$，于是有公因数 $\frac{3}{4}$ 可以提取。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{3}{4}\times4\frac{1}{7}+\frac{3}{4}\times3\frac{6}{7}\\&=\frac{3}{4}\times\left(4\frac{1}{7}+3\frac{6}{7}\right)\\&=\frac{3}{4}\times8\\&=6\end{aligned}$$

例 4 (1) 计算 $\frac{4}{7}\times74+37\times\frac{6}{7}$

分析 观察两个乘法算式，74 正好是 37 的 2 倍。利用积不变的性质，把 37 扩大 2 倍，$\frac{6}{7}$ 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$，积不变，$37\times\frac{6}{7}=74\times\frac{3}{7}$，这样就出现了公因数 74。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{4}{7}\times74+74\times\frac{3}{7}\\&=74\times\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\right)\\&=74\times1\\&=74\end{aligned}$$



(2) 计算 $\frac{1}{4}\times1\frac{2}{5}+66\times2.5\%$

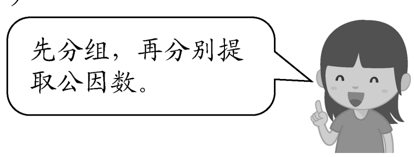
分析 观察两个乘法算式，$\frac{1}{4}=0.25$，$2.5\%=0.025$，$\frac{1}{4}$ 和 2.5% 在数值上是 10 倍的关系，所以可以利用积不变的性质把 $66\times2.5\%$ 转化为 6.6×0.25，这样就有了公因数 0.25。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=0.25\times1.4+6.6\times0.25\\&=0.25\times(1.4+6.6)\\&=0.25\times8\\&=2\end{aligned}$$

例 5 (1) 计算 $\frac{4}{7}\times54-16\times\frac{3}{5}+27\times\frac{6}{7}+\frac{1}{5}\times3$

分析 观察发现，原式共 4 项，共有 4 个分数，4 个分数的分母分别是 7 和 5，根据分母的不同，把原式中的 4 项分 2 组，再分别提取公因数。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left(\frac{4}{7}\times54+27\times\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}\times3-16\times\frac{3}{5}\right)\\&=\left(\frac{4}{7}\times54+54\times\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}\times3-48\times\frac{1}{5}\right)\\&=54\times\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\right)+\frac{1}{5}\times(3-48)\\&=54\times1-\frac{1}{5}\times45\\&=45\end{aligned}$$



（2）计算$\frac{7}{12}\times\frac{3}{20}+\frac{1}{9}\times\frac{6}{13}+\frac{5}{12}\times\frac{3}{20}+\frac{7}{13}\div9$

分析　观察发现，原式有4项，其中两项有公因数$\frac{3}{20}$；最后一项除以9可以转化为乘以$\frac{1}{9}$，所以有公因数$\frac{1}{9}$。本题是先分组，再提取。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left(\frac{7}{12}\times\frac{3}{20}+\frac{5}{12}\times\frac{3}{20}\right)+\left(\frac{1}{9}\times\frac{6}{13}+\frac{7}{13}\times\frac{1}{9}\right)\\&=\frac{3}{20}\times\left(\frac{7}{12}+\frac{5}{12}\right)+\frac{1}{9}\times\left(\frac{6}{13}+\frac{7}{13}\right)\\&=\frac{3}{20}\times1+\frac{1}{9}\times1\\&=\frac{3}{20}+\frac{1}{9}\\&=\frac{47}{180}\end{aligned}$$

秘籍4　二次提取公因数

有些题目开始时只有部分项有公因数可提取，提取公因数计算完后，发现计算过程中又有新的公因数可以提取，所以我们可以再次提取公因数进行计算，即二次提取公因数。

例6　（1）计算$\frac{16}{17}\times\frac{4}{13}+\frac{16}{17}\times\frac{5}{13}+\frac{9}{13}\times\frac{1}{17}$

分析　观察算式发现前两项有公因数$\frac{16}{17}$可提取，前两项提出公因数后发现又有新的公因数$\frac{9}{13}$可提取。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{16}{17}\times\left(\frac{4}{13}+\frac{5}{13}\right)+\frac{9}{13}\times\frac{1}{17}\\&=\frac{16}{17}\times\frac{9}{13}+\frac{9}{13}\times\frac{1}{17}\\&=\frac{9}{13}\times\left(\frac{16}{17}+\frac{1}{17}\right)\\&=\frac{9}{13}\times1\\&=\frac{9}{13}\end{aligned}$$

（2）计算$\frac{5}{8}\times\frac{7}{19}-0.625\times\frac{3}{19}+6.25\times0.1\times\frac{5}{19}+\frac{3}{8}\times\frac{9}{19}$

分析　观察算式发现，$0.625=\frac{5}{8}$，$6.25\times0.1=0.625=\frac{5}{8}$，稍作转化后前三项有公因数$\frac{5}{8}$可提取。计算过程中第三步又出现新的公因数$\frac{9}{19}$可以提取。

$$\text{原式}=\frac{5}{8}\times\frac{7}{19}-\frac{5}{8}\times\frac{3}{19}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{19}+\frac{3}{8}\times\frac{9}{19}$$

$=\frac{5}{8}\times\left(\frac{7}{19}-\frac{3}{19}+\frac{5}{19}\right)+\frac{3}{8}\times\frac{9}{19}$

$=\frac{5}{8}\times\frac{9}{19}+\frac{3}{8}\times\frac{9}{19}$

$=\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\right)\times\frac{9}{19}$

$=1\times\frac{9}{19}$

$=\frac{9}{19}$

秘籍总结

公有的因数要提取,不同的因数括号里边去。
单个数,难提取,所以先要乘 1,这样算式变整齐。
分、小互化形式多,统一之后再提取。
算式复杂先观察,分组之后再作答。
一次提取没算完,二次提取才简便。

秘籍修炼

练 1　计算(1)$\frac{4}{7}\times 0.8+\frac{4}{7}\times 60\%$　　(2)$2.5\div 4+\frac{1}{4}\times 1.5$

练 2　计算(1)$\frac{16}{17}\times 16+\frac{16}{17}$　　(2)$\frac{13}{12}\div\frac{1}{8}+\frac{11}{12}\times 8$

练 3　计算(1)$3.27\times\frac{3}{7}+3.27\div\frac{7}{4}$　　(2)$4\div 5\times 7.5+2.5\times\frac{4}{5}$

练 4　计算 $0.2\times 7\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}-1\div 5\times 3$

练 5　计算 $0.4\times 5.2+\frac{2}{5}\times 2.2+40\%\times 2.6$

练 6　计算$\frac{7}{12}\times\frac{29}{19}-\frac{7}{12}\times\frac{12}{19}+\frac{17}{19}\times\frac{5}{12}$

第2讲 分数的运算技巧（2）

秘籍导航

分数四则混合运算与整数四则混合运算一样，按先乘除后加减有顺序进行。整数四则混合运算中的定律和性质，在分数运算中同样适用。但是，要提高分数运算的速度和正确率，除了掌握这些常规的运算法则外，还应该掌握一些特殊的运算技能和技巧，本讲主要学习在分数四则运算中运用凑整法、拆分法、整体约分法和连锁约分法进行巧算。

秘籍攻略

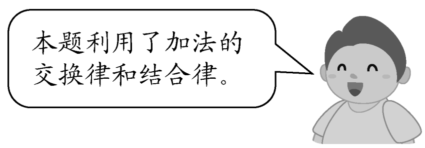
秘籍 1 凑整法

凑整就是根据算式中分数的特点、借助数的分解、组合以及有关运算性质，把分数凑成整数，从而达到简算和巧算的目的。

例 1 （1）计算 $3\frac{1}{4}+6\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}+8\frac{1}{3}$

分析 与整数“凑整法”相同，在分数加减混合运算中利用交换律、结合律使部分分数的和或差成为整数，从而使计算简化。这道题先把分数单位是$\frac{1}{4}$的分数结合为一组，再把分数单位是$\frac{1}{3}$的分数结合为一组。

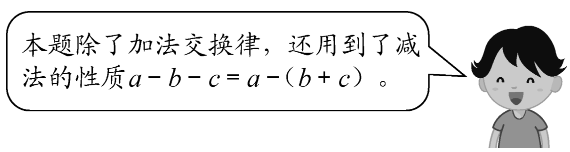
$$\begin{aligned}原式&=\left(3\frac{1}{4}+1\frac{3}{4}\right)+\left(6\frac{2}{3}+8\frac{1}{3}\right)\\&=5+15\\&=20\end{aligned}$$



（2）计算 $11\frac{3}{4}-3\frac{13}{20}+2.25-\frac{7}{20}$

分析 先把小数化成分数，$2.25=2\frac{1}{4}$，然后把分数单位相同的分数合为一组。

$$\begin{aligned}原式&=\left(11\frac{3}{4}+2\frac{1}{4}\right)-\left(3\frac{13}{20}+\frac{7}{20}\right)\\&=14-4\\&=10\end{aligned}$$



（3）计算$\frac{13}{19}\times\frac{11}{17}\times\frac{38}{13}\times\frac{51}{22}$

分析 这道题可以用乘法的交换律和结合律凑整。

$$\begin{aligned}原式&=\left(\frac{13}{19}\times\frac{38}{13}\right)\times\left(\frac{11}{17}\times\frac{51}{22}\right)\\&=2\times\frac{3}{2}\\&=3\end{aligned}$$

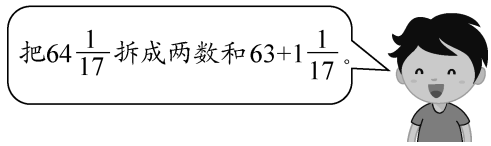
秘籍2 拆分法

在分数乘法计算中，可以根据算式中数的特点，合理地把参加运算的数拆成两数和或两数差的形式，在拆数时要注意：一是参加运算的数变形不变值，二是拆分要达到便于简化计算目的。

例2 计算 $64\frac{1}{17}\times\frac{1}{9}$

分析 由 $9\times7=63$ 想到把 $64\frac{1}{17}$ 拆分成 $63+1\frac{1}{17}=63+\frac{18}{17}$，再用乘法分配律展开，计算变得简便。

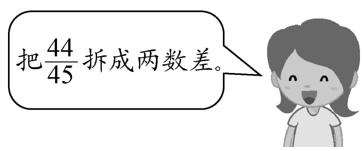
$$原式=\left(63+1\frac{1}{17}\right)\times\frac{1}{9}$$
$$=63\times\frac{1}{9}+\frac{18}{17}\times\frac{1}{9}$$
$$=7+\frac{2}{17}$$
$$=7\frac{2}{17}$$



例3 （1）计算 $\frac{44}{45}\times37$

分析 先把 $\frac{44}{45}$ 拆分成 1 减 $\frac{1}{45}$ 的差，然后按照乘法分配律计算。

$$原式=\left(1-\frac{1}{45}\right)\times37$$
$$=1\times37-\frac{1}{45}\times37$$
$$=37-\frac{37}{45}$$
$$=36\frac{8}{45}$$



（2）计算 $2015\times\frac{2013}{2014}$

分析 本题可以按照整数乘以分数的法则计算，但那样计算显然比较麻烦，若根据题中数的特点，把因数 2015 拆分成 $2014+1$ 或把 $\frac{2013}{2014}$ 拆分成 $1-\frac{1}{2014}$ 的形式，再按照乘法分配律进行计算，计算过程变得简便。

方法一：

$$原式=(2014+1)\times\frac{2013}{2014}$$
$$=2014\times\frac{2013}{2014}+1\times\frac{2013}{2014}$$
$$=2013+\frac{2013}{2014}$$

$=2013\dfrac{2013}{2014}$

方法二：

原式 $=2015\times\left(1-\dfrac{1}{2014}\right)$

$=2015\times1-2015\times\dfrac{1}{2014}$

$=2015-\dfrac{2015}{2014}$

$=2013\dfrac{2013}{2014}$

（3）计算 $3\dfrac{3}{5}\times25\dfrac{2}{5}+37.9\times6\dfrac{2}{5}$

分析　注意观察 $3\dfrac{3}{5}$ 和 $6\dfrac{2}{5}$，它们的和为 10，但是，只有当分别与它们相乘的另一个因数相同时，才能运用提取公因数的方法进行简算，因此不难想到把 37.9 分拆成 25.4 和 12.5 两部分。当 12.5 与 6.4 相乘时，又可以将 6.4 拆分成 8×0.8，这样计算就简便多了。

原式 $=3\dfrac{3}{5}\times25\dfrac{2}{5}+(25.4+12.5)\times6\dfrac{2}{5}$

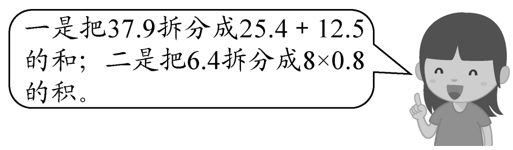
$=3.6\times25.4+25.4\times6.4+12.5\times6.4$

$=25.4\times(3.6+6.4)+12.5\times8\times0.8$

$=25.4\times10+100\times0.8$

$=254+80$

$=334$



秘籍3　整体约分法

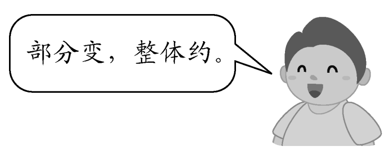
整体约分的算式分子和分母的形式基本上是一致的，在分子和分母的复杂计算式中大多可以提取出公因数，而剩下的一部分计算式子则是完全相同的部分，作为一个整体进行约分。

例 4　（1）计算 $\dfrac{1+2+3+\cdots+100}{2+4+6+\cdots+200}$

分析　观察分母，$2+4+6+\cdots+200=2\times(1+2+3+\cdots+100)$，分母提出公因数 2 之后剩下的部分与分子完全相同，所以可以进行整体约分。

原式 $=\dfrac{1+2+3+\cdots+100}{2\times(1+2+3+\cdots+100)}$

$=\dfrac{1}{2}$



（2）计算 $\dfrac{3737373737}{7171717171}$

分析　观察分子、分母，3737373737 和 7171717171 在结构上是相同的，把分子和分母都拆成两数积的形式。

原式 $=\dfrac{37\times101010101}{71\times101010101}$

$=\dfrac{37}{71}$

(3) 计算 $\dfrac{696969\times696696}{969969\times969696}$

分析 观察分子和分母,696969 与 969696,696696 与 969969 在数的形式上是一致的,根据数的特点先把每个因数拆分成两个数的积,再约分。

原式 $=\dfrac{69\times10101\times696\times1001}{969\times1001\times96\times10101}$

$=\dfrac{69\times696}{969\times96}$

$=\dfrac{23\times29}{323\times4}$

$=\dfrac{667}{1292}$

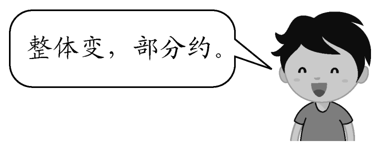
例 5 (1) 计算 $\dfrac{1\times3\times24+2\times6\times48+3\times9\times72}{1\times2\times4+2\times4\times8+3\times6\times12}$

分析 先观察分子,第一项 $1\times3\times24$,第二项是 $2\times6\times48$,第二项的 3 个因数分别是第一项 3 个因数的 2 倍,$2\times6\times48=(1\times2)\times(3\times2)\times(24\times2)=1\times3\times24\times8$;同理第三项 $3\times9\times72=1\times3\times24\times27$。同理,分母的第一项是 $1\times2\times4$,第二项 $2\times4\times8=1\times2\times4\times8$;第三项 $3\times6\times12=1\times2\times4\times27$。提出相同的因数,再约分。

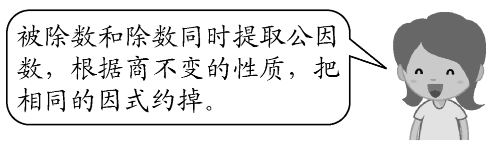
原式 $=\dfrac{1\times3\times24\times(1+8+27)}{1\times2\times4\times(1+8+27)}$

$=\dfrac{1\times3\times24}{1\times2\times4}$

$=9$



(2) 计算 $\left(9\dfrac{2}{7}+7\dfrac{2}{9}\right)\div\left(\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{9}\right)$



原式 $=\left(\dfrac{65}{7}+\dfrac{65}{9}\right)\div\left(\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{9}\right)$

$=\left[65\times\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}\right)\right]\div\left[5\times\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}\right)\right]$

$=[65\times1]\div[5\times1]$

$=13$

(3) 计算 $\dfrac{362+548\times361}{362\times548-186}$

原式 $=\dfrac{362+548\times361}{(361+1)\times548-186}$

$=\dfrac{362+548\times361}{361\times548+1\times548-186}$

$=\dfrac{362+548\times361}{361\times548+362}$

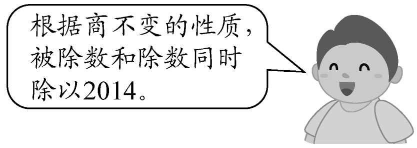
$=1$

（4）计算 $2014 \div 2014\frac{2014}{2015}$

原式 $=(2014 \div 2014) \div \left(2014\frac{2014}{2015} \div 2014\right)$

$=1 \div 1\frac{1}{2015}$

$=\frac{2015}{2016}$



秘籍 4　连锁约分

连锁约分指的是一连串有规律的分数进行连乘时，前后两项的分子分母可以不断进行约分的形式。

例 6　（1）计算 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{48}{49} \times \frac{49}{50}$

分析　观察原式，前一个分数的分母与后一个分数的分子完全相同，连锁约分后剩第一个分数的分子，最后一个分数的分母。

原式 $=\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{48}{49} \times \frac{49}{50}$

$=\frac{1}{50}$

（2）计算 $99 \times \left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \left(1-\frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{99}\right)$

分析　先把原式中小括号里的结果都算出来，得到 $99 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{98}{99}$，发现每一个分数的分母与后一个分数的分子完全相同，因此可以连锁约分。

原式 $=99 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{98}{99}$

$=99 \times \frac{1}{99}$

$=1$

秘籍总结

分数相加减，凑整是关键，单位相同归一组，和差往往是整数。
拆分为巧算，数值不能变，拆成和、差、积，凑整巧算是目的。
分子分母有规律，或提公因数，或拆两数积，整体约分变容易。
分数连乘有规律，连锁约分剩首尾。

秘籍修炼

练 1　计算（1）$4\frac{3}{4}-9+8\frac{1}{4}$　　　　（2）$5\frac{6}{7}-\left(\frac{1}{2}+\frac{6}{7}\right)$

练 2 计算(1)$123\times\frac{99}{124}$ (2)$2014\div\frac{2011}{2012}$

练 3 计算$\left(1\frac{5}{99}+3\frac{5}{33}+9\frac{5}{11}\right)\div\left(1\frac{1}{99}+3\frac{1}{33}+9\frac{1}{11}\right)$

练 4 计算$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{2014}\right)$

练 5 计算$\frac{1+3+5+7+\cdots+99}{2+6+10+14+\cdots+198}$

练 6 计算$\frac{1\times3+2\times6+3\times9+4\times12+5\times15+6\times18}{1\times2+2\times4+3\times6+4\times8+5\times10+6\times12}$

第3讲　分数裂项

秘籍导航

1. 熟悉具备分数裂项运算的题目模型。
2. 了解分数裂项运算题目常见的几种变式。
3. 掌握用找规律的方法解答较复杂的分数裂项题目。

秘籍攻略

秘籍 1　裂差

例 1　已知$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4}{3\times4}-\frac{3}{3\times4}=\frac{4-3}{3\times4}=\frac{1}{12}$　　$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{3\times4}+\frac{3}{3\times4}=\frac{4+3}{3\times4}=\frac{7}{12}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5}{3\times5}-\frac{3}{3\times5}=\frac{5-3}{3\times5}=\frac{2}{15}$　　$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{3\times5}+\frac{3}{3\times5}=\frac{5+3}{3\times5}=\frac{8}{15}$

填空(1) $\frac{1}{11}+\frac{1}{17}=\frac{17}{11\times17}+\frac{11}{11\times17}=\frac{(\quad)}{(\quad)}$

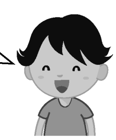
(2) $\frac{1}{7}-\frac{1}{10}=\frac{(\quad)}{(\quad)}-\frac{(\quad)}{(\quad)}=\frac{3}{70}$

通过计算你发现了什么规律?

分析　通过计算发现分母互质,分子为 1 的两个分数相加减,所得的和或差的分子是原来两个分母的和或差,分母为原来两个分母的积。

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{b+a}{ab}$

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}=\frac{b-a}{ab}$



(1)原式$=\frac{28}{187}$　(2)原式$=\frac{10}{7\times10}-\frac{7}{7\times10}$

例 2　(1) 计算$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{19\times20}+\frac{1}{20\times21}$

方法一:

分析　先对每一个分数进行变形、分拆。

$\frac{1}{1\times2}=\frac{2-1}{1\times2}=\frac{2}{1\times2}-\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2\times3}=\frac{3-2}{2\times3}=\frac{3}{2\times3}-\frac{2}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3\times4}=\frac{4-3}{3\times4}=\frac{4}{3\times4}-\frac{3}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4\times5}=\frac{5-4}{4\times5}=\frac{5}{4\times5}-\frac{4}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

$\vdots$　　$\vdots$　　$\vdots$　　$\vdots$

$$\frac{1}{19\times20}=\frac{20-19}{19\times20}=\frac{20}{19\times20}-\frac{19}{19\times20}=\frac{1}{19}-\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{20\times21}=\frac{21-20}{20\times21}=\frac{21}{20\times21}-\frac{20}{20\times21}=\frac{1}{20}-\frac{1}{21}$$

$$\text{原式}=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{19}}-\cancel{\frac{1}{20}}+\cancel{\frac{1}{20}}-\frac{1}{21}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{21}$$

$$=\frac{20}{21}$$

方法二：

分析 利用“欲进先退”的思想，先加简单的前面几个加数试一试，看看有什么规律。

$$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}$$

由上面四个算式不难看出$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

所以$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{19\times20}+\frac{1}{20\times21}=\frac{20}{21}$

像这道题每个分数的分母都是相邻的两个自然数的乘积，分子都是 1，它们可以通过变形，拆成两个分数差的形式，使得部分分数出现一加一减相互抵消的形式，从而使计算简化，我们把这种方法称为“裂项法”。由解法一可以归纳出一般表达式：$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$。

(2) 计算$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\cdots+\frac{1}{99\times101}$

分析 先观察前两个分数

$$\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times\frac{3-1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{1\times3}-\frac{1}{1\times3}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$$

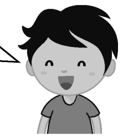
$$\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\times\frac{5-3}{3\times5}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{3\times5}-\frac{3}{3\times5}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

……

发现每一项都有$\frac{1}{2}$，所以可以把$\frac{1}{2}$提出来，则可以运用“裂项法”计算。

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{100}{101}=\frac{50}{101}$$

分母是两个差为d的自然数的乘积，分子都是1，这样的分数我们也可以通过分数变形、进行分拆。一般表示为$\frac{1}{n\times(n+d)}=\frac{1}{d}\times(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d})$。



（3）计算$\frac{3}{1\times4}+\frac{3}{4\times7}+\frac{3}{7\times10}+\cdots+\frac{3}{97\times100}$

分析　先观察前两个分数

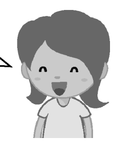
$$\frac{3}{1\times4}=\frac{4-1}{1\times4}=\frac{4}{1\times4}-\frac{1}{1\times4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4\times7}=\frac{7-4}{4\times7}=\frac{7}{4\times7}-\frac{4}{4\times7}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}$$

发现分母中两个自然数相差3，而分子正好为3，则可以运用“裂项法”计算。

原式$=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{97}-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$

当分母分成两个自然数的乘积的时候，只要分子与分母中两个自然数的差相等，就可以进行裂项拆分。归纳出表达式为$\frac{d}{n\times(n+d)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}$。



例3　计算$\frac{2}{1\times5}+\frac{2}{5\times9}+\frac{2}{9\times13}+\frac{2}{13\times17}+\frac{2}{17\times21}$

分析　这道题与例2（2）、（3）综合应用，注意观察分子的变化。这正是要同学们注意区分的地方。

$$\frac{2}{1\times5}=2\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{5-1}{1\times5}\right)=2\times\left[\frac{1}{4}\times\left(\frac{5}{1\times5}-\frac{1}{1\times5}\right)\right]=2\times\left[\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)\right]$$

$$\frac{2}{5\times9}=2\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{9-5}{5\times9}\right)=2\times\left[\frac{1}{4}\times\left(\frac{9}{5\times9}-\frac{5}{5\times9}\right)\right]=2\times\left[\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)\right]$$

原式$=2\times\left[\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{21}\right)\right]$

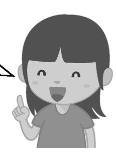
$=2\times\left[\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{21}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{21}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{20}{21}$

$=\frac{10}{21}$

分子不是1的时候，先把分子提取出来，转变成分子是1的情况。



分母是两个差为d的自然数的乘积，分子都是1，这样的分数我们也可以通过分数变形、进行分拆。一般表示为$\frac{1}{n\times(n+d)}=\frac{1}{d}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}\right)$。

秘籍 2 裂和

例 4 计算$\frac{5}{2\times3}-\frac{7}{3\times4}+\frac{9}{4\times5}-\frac{11}{5\times6}+\frac{13}{6\times7}-\frac{15}{7\times8}$

分析 注意观察题目中运算符号的变化为加减交替，这正是分数拆分中“裂和”题目的特征。再观察分子发现分子分别等于分母中两个自然数的和。

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{3+2}{2\times3}-\frac{4+3}{3\times4}+\frac{5+4}{4\times5}-\frac{6+5}{5\times6}+\frac{7+6}{6\times7}-\frac{8+7}{7\times8}\\
&=\left(\frac{3}{2\times3}+\frac{2}{2\times3}\right)-\left(\frac{4}{3\times4}+\frac{3}{3\times4}\right)+\left(\frac{5}{4\times5}+\frac{4}{4\times5}\right)-\left(\frac{6}{5\times6}+\frac{5}{5\times6}\right)+\\
&\quad\left(\frac{7}{6\times7}+\frac{6}{6\times7}\right)-\left(\frac{8}{7\times8}+\frac{7}{7\times8}\right)\\
&=\frac{3}{2\times3}+\frac{2}{2\times3}-\frac{4}{3\times4}-\frac{3}{3\times4}+\frac{5}{4\times5}+\frac{4}{4\times5}-\frac{6}{5\times6}-\frac{5}{5\times6}+\frac{7}{6\times7}+\frac{6}{6\times7}-\\
&\quad\frac{8}{7\times8}-\frac{7}{7\times8}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\\
&=\frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

综合上面几道例题发现，在分数裂项中先判断分子是否可以拆分，并且决定裂和还是裂差。当分子被裂开后都变成1，成为单位分数，不再是原来的分子了，这一点容易出现错误，希望引起注意。

例 5 计算$\frac{1}{5}+\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\frac{7}{12}+\frac{9}{20}+\frac{11}{30}+\frac{19}{35}+\frac{13}{42}$

分析 这个题的分母中除去第一个和第三个分数外，其余分数的分母都可以表示成两个相邻自然数乘积的形式。

原式$=\frac{1}{5}+\frac{5}{2\times3}+\frac{5}{7}+\frac{7}{3\times4}+\frac{9}{4\times5}+\frac{11}{5\times6}+\frac{19}{5\times7}+\frac{13}{6\times7}$

现在可以看到除去$\frac{19}{5\times7}$以外，其余分数的分子正好等于分母那两个因数的和，可以拆分成两个分数和的形式。

而此题$\frac{19}{5\times7}$的处理技巧是$\frac{19}{5\times7}=\frac{5+7+7}{5\times7}=\frac{5}{5\times7}+\frac{7}{5\times7}+\frac{7}{5\times7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{5}+\frac{5}{2\times3}+\frac{5}{7}+\frac{7}{3\times4}+\frac{9}{4\times5}+\frac{11}{5\times6}+\frac{19}{5\times7}+\frac{13}{6\times7}\\
&=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\\
&=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)+
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)$$
$$=1+1+1+1$$
$$=4$$

秘籍3　综合裂项

例6 （1）观察下面算式

$$\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)$$
$$\frac{1}{2\times3\times4}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)$$
$$\frac{1}{3\times4\times5}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)$$
…
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

① $\frac{1}{6\times7\times8}=\frac{1}{(\quad)}\times\left[\frac{1}{(\quad)\times(\quad)}-\frac{1}{(\quad)\times(\quad)}\right]$

② 计算$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}+\cdots+\frac{1}{8\times9\times10}$

分析 ① $\frac{1}{6\times7\times8}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6\times7}-\frac{1}{7\times8}\right)$

② 这个题的分母是三项，由上面式子拆分如下：得

$$原式=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{9\times10}\right)$$
$$=\frac{11}{45}$$

（2）计算 $1155\times\left(\frac{5}{2\times3\times4}+\frac{7}{3\times4\times5}+\frac{9}{4\times5\times6}+\cdots+\frac{19}{9\times10\times11}\right)$

分析 这个算式的括号中分母的前两个数之和正好等于分子，可以先将每个分数裂和。

$$原式=1155\times\left(\frac{2+3}{2\times3\times4}+\frac{3+4}{3\times4\times5}+\frac{4+5}{4\times5\times6}+\cdots+\frac{9+10}{9\times10\times11}\right)$$
$$=1155\times\left(\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{9\times11}\right)$$

（括号中的分数按照分母两个数差不同可以分为两组）

$$=1155\times\left[\left(\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\cdots+\frac{1}{10\times11}\right)+\left(\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}\right.\right.$$

$+\cdots+\frac{1}{9\times11}\Big)\Big]$

（第一个小括号内可以直接拆分了，第二个小括号内分母还是要分成两组的）

$=1155\times\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{8\times10}\right)+\left(\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\right.\right.$

$\left.\left.\cdots+\frac{1}{9\times11}\right)\right]$

（这时括号内的分数都可以进行拆分运算了）

$=1155\times\left[\frac{8}{33}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{11}\right)\right]$

$=1155\times\left(\frac{8}{33}+\frac{1}{5}+\frac{4}{33}\right)$

$=1155\times\left(\frac{4}{11}+\frac{1}{5}\right)$

$=651$

秘籍总结

秘籍 1：分数裂项中分子判断是否可裂项，并且决定裂差或者裂和。

秘籍 2：常用的裂项公式

裂差：$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\frac{d}{n\times(n+d)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}$

$\frac{1}{n\times(n+d)}=\frac{1}{d}\times(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d})$

裂和：$\frac{a+b}{a\times b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

秘籍修炼

练 1　计算$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\frac{1}{8\times10}+\cdots+\frac{1}{96\times98}+\frac{1}{98\times100}$

练 2　计算$\frac{2}{1\times4}+\frac{2}{4\times7}+\frac{2}{7\times10}+\frac{2}{10\times13}+\cdots+\frac{2}{97\times100}$

练 3　计算 $1+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}+11\frac{1}{42}+13\frac{1}{56}+15\frac{1}{72}+17\frac{1}{90}$

练 4　计算$\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{2}{2\times3\times4}+\frac{2}{3\times4\times5}+\frac{2}{4\times5\times6}+\cdots+\frac{2}{8\times9\times10}+\frac{2}{9\times10\times11}$

练 5　计算$\frac{49}{12}-\frac{63}{20}+\frac{77}{30}-\frac{91}{42}+\frac{105}{56}$

练 6　计算$\frac{2}{1\times(1+2)}+\frac{3}{(1+2)\times(1+2+3)}+\frac{4}{(1+2+3)\times(1+2+3+4)}+\cdots+$
$\frac{10}{(1+2+3+\cdots+9)\times(1+2+3+\cdots+10)}$

第4讲　繁分数

秘籍导航

一个分数,如果分子和分母中至少有一项还含有分数、小数或者四则运算,这样的分数就叫作繁分数。在繁分数中,把分子部分和分母部分分开的那条分数线,叫作繁分数的主分数线,主分数线比其他分数线要长一些,书写位置要取中。在运算过程中,主分数线要对准等号。

把繁分数化为最简分数或整数的过程,叫作繁分数的化简。本讲主要学习繁分数化简的基本方法和技巧。

秘籍攻略

秘籍 1　繁分数化简常用方法

例 1　化简下面的繁分数

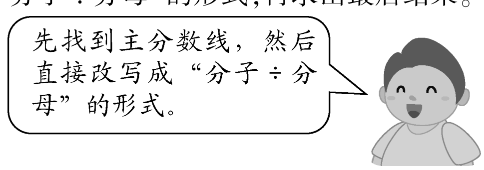
(1) $\dfrac{\frac{3}{5}}{7}$　　(2) $\dfrac{3}{\frac{5}{7}}$　　(3) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$

分析　根据分数与除法的关系,分数除法运算可以写成繁分数的形式,比如 $\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$,反过来,繁分数也可以改写成"分子部分 ÷ 分母部分"的形式,把繁分数改写成分数除法形式,首先要找出繁分数的主分数线,确定出分子部分和分母部分,然后根据分数与除法的关系把繁分数写成"分子 ÷ 分母"的形式,再求出最后结果。

(1)原式 $=\frac{3}{5}\div7=\frac{3}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{35}$

(2)原式 $=3\div\frac{5}{7}=3\times\frac{7}{5}=\frac{21}{5}$

(3)原式 $=\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}=\frac{3}{5}\times\frac{7}{4}=\frac{21}{20}$



例 2　化简繁分数

(1) $\dfrac{3.6}{4.8}$　　(2) $\dfrac{\frac{6}{7}}{\frac{5}{14}}$　　(3) $\dfrac{1\frac{1}{5}}{2\frac{2}{3}}$　　(4) $\dfrac{0.15}{\frac{3}{8}}$

分析　繁分数化简还可以根据分数的基本性质,把分子与分母同时扩大或缩小相

同的倍数。

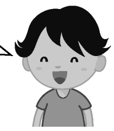
$$(1)原式=\frac{3.6\times10}{4.8\times10}=\frac{36\div12}{48\div12}=\frac{3}{4}$$

$$(2)原式=\frac{\frac{6}{7}\times14}{\frac{5}{14}\times14}=\frac{6\times2}{5\times1}=\frac{12}{5}$$

$$(3)原式=\frac{\frac{6}{5}\times15}{\frac{8}{3}\times15}=\frac{6\times3}{8\times5}=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}$$

$$(4)原式=\frac{\frac{3}{20}\times40}{\frac{3}{8}\times40}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

根据分数的基本性质，把繁分数的分子部分、分母部分同时扩大相同的倍数，这个倍数最好是分子部分与分母部分所有分母的最小公倍数，从而去掉分子部分和分母部分的分母，然后通过计算化为最简分数或整数。



例 3　化简下面繁分数

$(1)\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{1\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}}$　$(2)\dfrac{4\frac{2}{3}-3\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}+4\frac{5}{6}}$　$(3)\dfrac{0.48\times3\frac{1}{2}\times1.1}{1.21\times2\frac{2}{5}\times10.5}$　$(4)\dfrac{10.2\times16.2\div1\frac{1}{4}}{0.8\times81\times5\frac{1}{10}}$

分析　繁分数的分子或分母中含有四则运算，既可以改写成“分子 ÷ 分母”的形式，也可以根据分数的基本性质化简。

$$(1)原式=\frac{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}}{1\frac{3}{6}-1\frac{2}{6}}=\frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{\frac{17}{12}\times12}{\frac{1}{6}\times12}=\frac{17}{2}\quad 或者$$

$$原式=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\div\left(1\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{12}\div\frac{1}{6}=\frac{17}{12}\times\frac{6}{1}=\frac{17}{2}$$

$$(2)原式=\left(4\frac{2}{3}-3\frac{3}{4}\right)\div\left(2\frac{1}{2}+4\frac{5}{6}\right)=\frac{11}{12}\div\frac{22}{3}=\frac{11}{12}\times\frac{3}{22}=\frac{1}{8}\quad 或者$$

$$原式=\frac{\left(\frac{14}{3}-\frac{15}{4}\right)\times12}{\left(\frac{5}{2}+\frac{29}{6}\right)\times12}=\frac{14\times4-15\times3}{5\times6+29\times2}=\frac{11}{88}=\frac{1}{8}$$

$$(3)原式=\frac{0.48\times3.5\times1.1}{1.21\times2.4\times10.5}=\frac{0.2\times1\times1}{1.1\times1\times3}=\frac{0.2}{3.3}=\frac{2}{33}$$

$$(4)原式=\frac{10.2\times16.2\times0.8}{0.8\times81\times5.1}=\frac{2\times16.2\times1}{1\times81\times1}=0.4=\frac{2}{5}$$

秘籍2 繁分数化简技巧

繁分数的分子或分母部分可能含有四则运算,有时可以通过凑整、提取公因数等方法进行巧算,先巧算再化简,可以使计算变得简便。

例4 化简繁分数(1)$\dfrac{\left(3\dfrac{3}{7}+0.62\right)+\left(5\dfrac{4}{7}+0.38\right)}{3\dfrac{5}{6}\times5\dfrac{1}{7}+3\dfrac{5}{6}\times4\dfrac{6}{7}}$ (2)$\dfrac{5\dfrac{1}{7}+3\dfrac{3}{11}+1\dfrac{13}{23}}{3\dfrac{3}{7}+2\dfrac{2}{11}+1\dfrac{1}{23}}$

分析 (1)小题的分子部分可以凑整,分母部分可以提取公因数。(2)小题的分子分母化为假分数后提取公因数,发现分子分母可以约去相同的部分。

(1)原式 $=\dfrac{\left(3\dfrac{3}{7}+5\dfrac{4}{7}\right)+(0.62+0.38)}{3\dfrac{5}{6}\times\left(5\dfrac{1}{7}+4\dfrac{6}{7}\right)}=\dfrac{10}{\dfrac{23}{6}\times10}=\dfrac{6}{23}$

(2)原式 $=\dfrac{\dfrac{36}{7}+\dfrac{36}{11}+\dfrac{36}{23}}{\dfrac{24}{7}+\dfrac{24}{11}+\dfrac{24}{23}}=\dfrac{36\times\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{23}\right)}{24\times\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{23}\right)}=\dfrac{36}{24}=\dfrac{3}{2}$

秘籍3 连分数的化简

例5 (1) 化简繁分数 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+2}}$

分析 这种繁分数叫连分数,连分数是繁分数的特殊形式。计算连分数采取自下而上的方法,先将连分数中最下面的分数化简,然后再逐步向上计算,最后达到化多层为单层的目的。

原式 $=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}=1\div\dfrac{4}{3}=\dfrac{3}{4}$

(2) 化简繁分数 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4}}}}$

分析

原式 $=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{4}{13}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{30}{13}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{13}{30}}=\dfrac{30}{43}$

(3) 化简繁分数 $\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{4}}}}$

分析 这种繁分数可以先将最下面的分数化简,然后再逐层向上计算,最后达到化多层为单层的目的。

$$原式=\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{3-\cfrac{4}{7}}}=\cfrac{1}{4-\cfrac{7}{17}}=\cfrac{1}{\cfrac{61}{17}}=\frac{17}{61}$$

例6 已知$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{4}}}}=\frac{8}{11}$,求 x。

分析 本题可以采取倒推的方法,也可以从下往上逐层计算,最后求出 x。

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{4}}}=\frac{11}{8}$$

$$2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{4}}=\frac{8}{3}$$

$$x+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

$$x=\frac{5}{4}$$

秘籍总结

把繁分数改写成"分子部分 ÷ 分母部分"的形式,按分数除法来计算。

按照分数基本性质来化简,所乘的数是上下两部分分母的最小公倍数。

遇到连分数。要么还原,要么从下往上层层算。

秘籍修炼

练1 (1)化简$\cfrac{\cfrac{1}{2}}{3}$ (2)化简$\cfrac{4}{\cfrac{2}{5}}$

练2 (1)化简$\cfrac{\cfrac{1}{3}}{\cfrac{1}{4}}$ (2)化简$\cfrac{1\frac{1}{4}}{2\frac{3}{8}}$

练 3　(1) 化简 $\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}}{1\dfrac{1}{3}-1\dfrac{1}{4}}$　　(2) 化简 $\dfrac{0.48\times3.6}{7.2\times0.72}$

练 4　化简 $\dfrac{14\dfrac{2}{5}+26\dfrac{2}{7}+36\dfrac{4}{9}}{1\dfrac{4}{5}+3\dfrac{2}{7}+4\dfrac{5}{9}}$

练 5　化简 $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}}$

练 6　已知 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}}=\dfrac{9}{13}$，求 x。

第5讲　换元法

秘籍导航

对于数比较大或者算式比较长的计算题，如果能根据题目的结构特点，把某个大数或某个大长算式看成一个整体，用一个字母去代替它，从而使计算得到简化，这叫换元法。换元的实质是转化，将复杂的算式化繁为简，化难为易。

秘籍攻略

秘籍 1　用字母代替一个大数

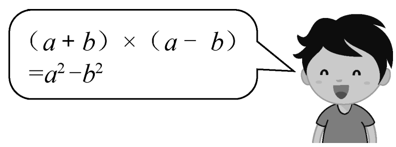
如果算式中的数特别大，可以用字母来代换它，需要注意的是相同的字母必须代表相同的数，不同的字母代表不同的数。

例 1　（1）计算 $82\times80-81\times79$

分析　这道题数字比较接近，数也较小，可以直接计算。我们发现 81 与 79 差 2，可以设它们中间的数 80 为 a，即可以构造平方差公式。

设 $80=a$，则 $82=a+2$，$81=a+1$，$79=a-1$；

$$\begin{aligned}原式&=(a+2)\times a-(a+1)\times(a-1)\\&=a^2+2a-a^2+1\\&=2a+1\\&=2\times80+1\\&=161\end{aligned}$$



（2）计算$\dfrac{987654321^2-1}{987654322\times987654320}$

分析　题目中的三个大数比较接近，可以设其中一个数为字母 a，其他两个数都用含有 a 的式子表示。

设 $987654321=a$

$$\begin{aligned}原式&=\frac{a^2-1}{(a+1)\times(a-1)}\\&=\frac{a^2-1}{a^2-1}\\&=1\end{aligned}$$

（3）计算$\dfrac{2014+2015\times2013}{2014\times2015-1}$

分析　题目中的三个大数比较接近，可以设 2014 为字母 a，其他两个数都用含有 a 的式子表示。

设 $2014=a$，

原式 $=\frac{a+(a+1)\times(a-1)}{a\times(a+1)-1}=\frac{a^2+a-1}{a^2+a-1}=1$

例 2 (1) 计算 $98764\times88765-98765\times88764$

分析 这道题前后两项的因数都比较大,可以用字母把大数替换掉,从而使计算简化。

设 $98764=a$,则 $98765=a+1$;

设 $88764=b$,则 $88765=b+1$,

原式 $=a\times(b+1)-(a+1)\times b$

$=ab+a-ab-b$

$=a-b$

$=10000$

(2) 计算 $987654320\times123456789-987654321\times123456788$

分析 这道题前后两项相乘的因数都比较大,可以用字母把大数替换掉,从而使计算简化。

设 $987654320=a$,则 $987654321=a+1$;

设 $123456788=b$,则 $123456789=b+1$,

原式 $=a\times(b+1)-(a+1)\times b$

$=ab+a-ab-b$

$=a-b$

$=864197532$

秘籍 2 用字母代换一个长算式

例 3 (1) 计算 $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$

分析 前后两项共有 4 个因数,这 4 个因数非常相似,并且每个因数都是几个分数连加的和。对于这种情况可以把一个长算式当作一个整体处理,用一个字母去代替它,从而使计算简便。

方法一:

设 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=a$

原式 $=(1+a)\times\left(a+\frac{1}{6}\right)-\left(1+a+\frac{1}{6}\right)\times a$

$=a+\frac{1}{6}+a^2+\frac{a}{6}-a-a^2-\frac{a}{6}$

$=\frac{1}{6}$

方法二:

设 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=a$,则 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=a+\frac{1}{6}$;

设$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=b$,则$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=b+\frac{1}{6}$。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a\times\left(b+\frac{1}{6}\right)-\left(a+\frac{1}{6}\right)\times b\\&=ab+\frac{1}{6}a-ab-\frac{1}{6}b\\&=\frac{1}{6}a-\frac{1}{6}b\\&=\frac{1}{6}\times(a-b)\\&=\frac{1}{6}\times1\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

(2) 计算$\left(\frac{621}{126}+\frac{739}{358}+\frac{458}{947}\right)\times\left(\frac{739}{358}+\frac{458}{947}+\frac{378}{207}\right)-\left(\frac{621}{126}+\frac{739}{358}+\frac{458}{947}+\frac{378}{207}\right)\times\left(\frac{739}{358}+\frac{458}{947}\right)$

分析 这道题若按常规的运算顺序处理,计算量太大了。对于这样的题目可以用一个字母来代替一个算式,注意相同的字母代替相同的算式,不同的字母代替不同的算式。

方法一:

设$\frac{739}{358}+\frac{458}{947}=a$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left(\frac{621}{126}+a\right)\times\left(a+\frac{378}{207}\right)-\left(\frac{621}{126}+a+\frac{378}{207}\right)\times a\\&=\frac{621}{126}a+\frac{621}{126}\times\frac{378}{207}+a^2+\frac{378}{207}a-\frac{621}{126}a-a^2-\frac{378}{207}a\\&=\frac{621}{126}\times\frac{378}{207}\\&=9\end{aligned}$$

方法二:

设$\frac{621}{126}+\frac{739}{358}+\frac{458}{947}=a$;$\frac{739}{358}+\frac{458}{947}=b$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a\times\left(b+\frac{378}{207}\right)-\left(a+\frac{378}{207}\right)\times b\\&=ab+\frac{378}{207}a-ab-\frac{378}{207}b\\&=\frac{378}{207}a-\frac{378}{207}b\\&=\frac{378}{207}\times(a-b)\\&=\frac{378}{207}\times\frac{621}{126}\\&=9\end{aligned}$$

例3的两个计算题从结构上有个共同特点,都符合"全鱼结构",以此题为例,

若把最长的算式$\frac{621}{126}+\frac{739}{358}+\frac{458}{947}+\frac{378}{207}$看作是一条鱼，则鱼头是$\frac{621}{126}$，鱼尾是$\frac{378}{207}$，鱼的中间部分是$\frac{739}{358}+\frac{458}{947}$，鱼的前半段是$\frac{621}{126}+\frac{739}{358}+\frac{458}{947}$，鱼的后半段是$\frac{739}{358}+\frac{458}{947}+\frac{378}{207}$。算式的结构可以概括为“鱼的前半段×后半段－整条大鱼×中间”计算结果是“鱼头×鱼尾”，即$\frac{378}{207}\times\frac{621}{126}=9$。例3(1)符合“全鱼结构”，计算结果是鱼头×鱼尾＝$1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$。

例 4 计算$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2014}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2015}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2015}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2014}\right)$

分析 这道题若按常规的运算顺序处理，计算量实在太大了。前后两项共4个因数，这4个因数非常相似，并且每个因数都是若干个分数连加的和。对于这种情况可以把一个大长算式当作一个整体处理，用一个字母去代替它，从而使计算简便。

设$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2014}$

原式$=(1+a)\times\left(a+\frac{1}{2015}\right)-\left(1+a+\frac{1}{2015}\right)\times a$

$=a+\frac{1}{2015}+a^2+\frac{1}{2015}a-a-a^2-\frac{1}{2015}a$

$=\frac{1}{2015}$

这道题符合“鱼的前半段×后半段－整条大鱼×中间”的全鱼结构模式，于是可以直接用“鱼头×鱼尾”的办法，计算结果是$1\times\frac{1}{2015}=\frac{1}{2015}$

例 5 计算$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{9}{10}\right)\times\frac{1}{2}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{9}{10}\right)\times\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{9}{10}\right)$

分析 这道题若按常规的运算顺序处理，计算量很大。如果用换元法用一个字母代替$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{9}{10}$，则计算变得简单。

设$a=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{9}{10}$

原式$=a^2+a\times\frac{1}{2}-(1+a)\times\left(a-\frac{1}{2}\right)$

$=a^2+\frac{a}{2}-\left(a-\frac{1}{2}+a^2-\frac{a}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}$

秘籍3　用字母代替一个繁分数

例6　计算$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2015}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2015}}}}}}$

分析　这道题若按常规的运算顺序处理,计算量实在太大。前后两项都有繁分数$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2015}}}}$,可以把这个繁分数当作一个整体打包处理,从而使计算简便。

设$a=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2015}}}}$,

原式$=\dfrac{1}{1+a}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a}}=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{a}{a+1}=\dfrac{a+1}{a+1}=1$

秘籍总结

换元能巧算,打包处理是关键。
一个大数,加1或减1后多次出现,用字母代换能简便。
分数连加的长算式,头尾不同多次出现,用字母换元计算很简单。
繁分数稍加改动多次出现,要把相同的部分用字母来替换。
换元的宗旨是转化,把复杂的算式变简单。

秘籍修炼

练1　计算$\dfrac{2014^2}{2013\times2015+1}$

练2　计算$2015\times3411-2014\times3412$

练 3 计算$(0.1+0.21+0.321+0.4321)\times(0.21+0.321+0.4321+0.54321)-(0.1+0.21+0.321+0.4321+0.54321)\times(0.21+0.321+0.4321)$

练 4 计算$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$

练 5 计算$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)\times\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)\times\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)$

练 6 计算$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2015}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2015}}}}}}$

第6讲　公式类的计算

秘籍导航

1. 理解从 1 开始连续若干个自然数平方和公式的推导过程，能够灵活运用自然数平方和公式解决相关的计算问题。

2. 理解从 1 开始连续若干个自然数立方和公式的推导过程，能够灵活运用自然数立方和公式解决相关的计算问题。

秘籍攻略

秘籍 1　自然数平方和公式

例 1　（1）　计算 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$

分析　$1^2=1\times1=1$

$2^2=2\times2=2+2$

$3^2=3\times3=3+3+3$

$4^2=4\times4=4+4+4+4$

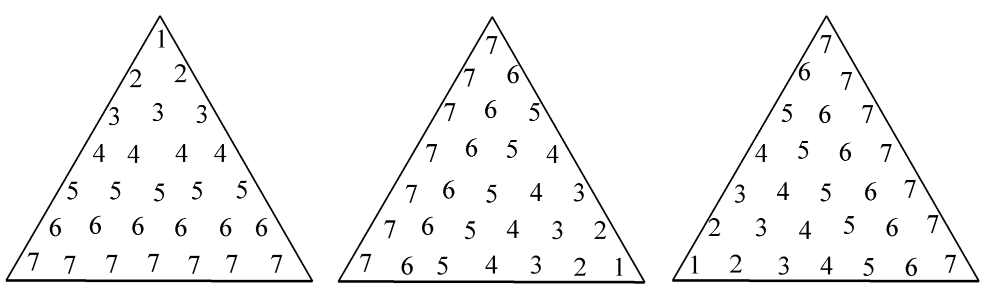
……

$7^2=7\times7=7+7+7+7+7+7+7$

于是，$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$ 等于下面三角形数阵图中所有数相加的和。

```
            1
          2   2
        3   3   3
      4   4   4   4
    5   5   5   5   5
  6   6   6   6   6   6
7   7   7   7   7   7   7
```

把上面的三角形数阵图旋转、再旋转，加上原图共有 3 幅图，每幅图上所有数相加的和都等于 $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2$。



根据上面这三幅图相同位置上的 3 个数相加都等于 $2\times7+1=15$，所以每个位置上的平均数是 $15\div3=5$。每幅图上都 $1+2+3+4+5+6+7=28$ 个数字，所以每幅图上数字的和都是 $5\times28=140$。

（2）计算 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

分析 $1^2=1\times1=1$

$2^2=2\times2=2+2$

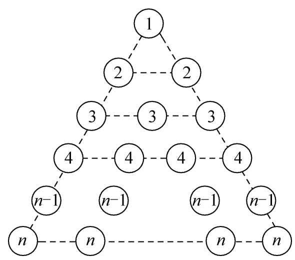
$3^2=3\times3=3+3+3$

$4^2=4\times4=4+4+4+4$

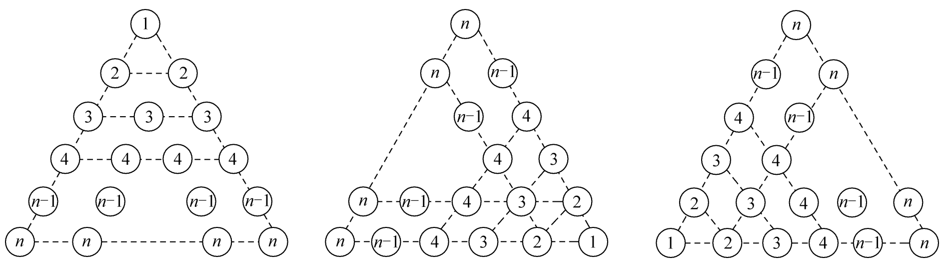
……

$n^2=n\times n=\underbrace{n+n+\cdots+n}_{n\text{个“}n\text{”相加}}$

于是，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 等于下面三角形数阵图中所有数相加的和。



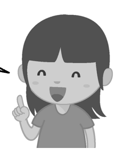
我们把上面的三角形数阵图旋转、再旋转，加上原图共有 3 幅图，每幅图上所有数相加的和都等于 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$。



把 3 幅图相同位置上的 3 个数相加，每个位置上 3 个数相加都等于 $2n+1$，所以每个位置上的平均数都是 $\frac{2n+1}{3}$，每幅图上都有 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 个数字，所以每幅图上所有数字相加的和都是

$$\frac{2n+1}{3}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

即 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$



这是从 1 开始若干个连续自然数平方和公式，同学们要理解并记住这个公式。

(3) 计算 $1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$

分析 这是从 1 开始连续 100 个自然数平方和公式，符合公式 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 的要求，所以可以直接用公式计算。

$$\text{原式}=\frac{100\times(100+1)\times(2\times100+1)}{6}$$
$$=338350$$

例 2 (1) 计算 $1+4+9+16+\cdots+900$

分析 经观察，$1=1^2$，$4=2^2$，$9=3^2$，$16=4^2$，……，$900=30^2$，可以把原式转化成自然数平方和的形式再计算。

$$\text{原式}=1^2+2^2+3^2+\cdots+30^2$$
$$=\frac{30\times(30+1)\times(2\times30+1)}{6}$$
$$=9455$$

(2) 计算 $8^2+9^2+10^2+\cdots+20^2$

分析 这个算式缺少 $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2$，不能直接用公式计算，可以先把缺少的项补上，补成符合公式要求的形式，然后再把补的数减掉。

$$\text{原式}=(1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2)$$
$$=\frac{20\times(20+1)\times(2\times20+1)}{6}-\frac{7\times(7+1)\times(2\times7+1)}{6}$$
$$=2870-140$$
$$=2730$$

例 3 (1) 计算 $2^2+4^2+6^2+\cdots+80^2$

分析 这个算式不符合 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的要求，但是观察后我们发现 $2^2=2^2\times1^2$，$4^2=2^2\times2^2$，$6^2=2^2\times3^2$，……，$80^2=2^2\times40^2$，提出公因数 2^2 后括号内的部分符合 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 公式要求。

$$\text{原式}=2^2\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+40^2)$$
$$=4\times\frac{40\times(40+1)\times(2\times40+1)}{6}$$
$$=4\times22140$$
$$=88560$$

(2) 计算 $1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2$

分析 这个算式不符合 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的要求，缺少 $2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2$，我们可以把缺少的项补上，使之成为 $1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$，然后再减去 $2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2$。

$$\text{原式}=(1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2)-(2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2)$$
$$=\frac{100\times(100+1)\times(2\times100+1)}{6}-2^2\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+50^2)$$
$$=338350-171700$$

$=166650$

(3) 计算 $1\times2+2\times4+3\times6+4\times8+\cdots+20\times40$

分析 这个算式的每一项都是有规律的，$1\times2=1^2\times2$，$2\times4=2\times2\times2=2^2\times2$，$3\times6=3\times3\times2=3^2\times2$，$4\times8=4\times4\times2=4^2\times2$，$\cdots 20\times40=20\times20\times2=20^2\times2$

方法一　原式 $=1^2\times2+2^2\times2+3^2\times2+\cdots+20^2\times2$

$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2)\times2$$

$$=\frac{20\times(20+1)\times(2\times20+1)}{6}\times2$$

$$=5740$$

方法二　或用踢三角的方法观察 $1\times2=2$

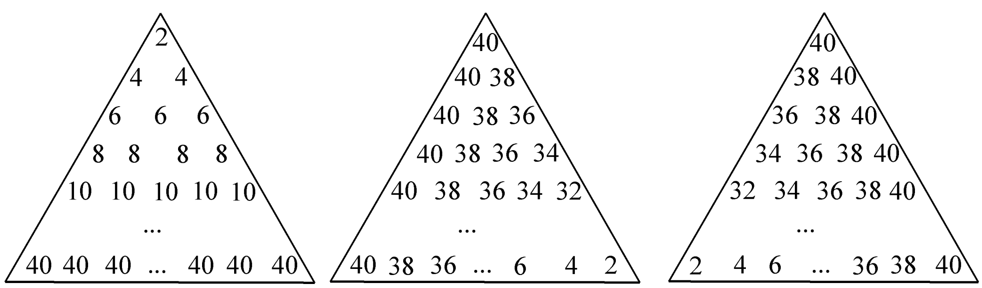
$2\times4=4+4$

$3\times6=6+6+6$

$\cdots$

$$20\times40=\underbrace{40+40+40+\cdots+40}_{20个“40”}$$

画图如下：把三角形数阵图旋转、再旋转



原式 $=\dfrac{(40\times2+2)\times(1+2+3+\cdots+20)}{3}=\dfrac{82\times20\times21}{6}=5740$

秘籍 2 自然数立方和公式

例 4 (1) 计算 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

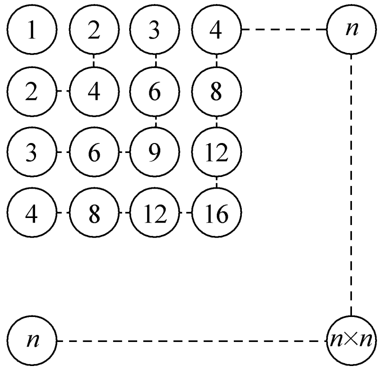
分析 $1^3=1\times1^2=1$

$2^3=2\times2^2=2\times(1+2+1)=2+4+2$

$3^3=3\times3^2=3\times(1+2+3+2+1)=3+6+9+6+3$

……

$n^3=n\times n^2=n\times(1+2+3+\cdots+n+\cdots+3+2+1)=n+2n+3n+\cdots+n\times n+\cdots+3n+2n+n$ 把 $1^3,2^3,3^3,\cdots,n^3$ 转化后围成下面的正方形数阵图：



如上图，以左上角的①为中心，第一圈是 $1=1^3$，第二圈是 $2+4+2=2^3$，第三圈 $3+6+9+6+3=3^3$，第四圈是 $4+8+12+16+12+8+4=4^3$，……，第 n 圈是 $n+2n+3n+\cdots n\times n+\cdots+3n+2n+n=n^3$。这个正方形数阵图中所有数字的和就等于 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$，也可以从上到下按行计算：

第 1 行：$1\times(1+2+3+4+\cdots+n)$

第 2 行：$2\times(1+2+3+4+\cdots+n)$

第 3 行：$3\times(1+2+3+4+\cdots+n)$

第 4 行：$4\times(1+2+3+4+\cdots+n)$

……

第 n 行：$n\times(1+2+3+4+\cdots+n)$

把上面 n 行 n 个和数相加，提取公因数后得到这个正方形数阵图中所有数相加的和为 $(1+2+3+4+\cdots+n)\times(1+2+3+4+\cdots+n)=(1+2+3+4+\cdots+n)^2=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$。所以：$\boxed{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+4+\cdots+n)^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$，

这是从 1 开始连续 n 个自然数立方和公式，同学们要理解并记住这个公式。

（2）计算 $1^3+2^3+3^3+\cdots+100^3$

分析 这是从 1 开始连续 100 个自然数先立方再求和，完全符合自然数立方和公式的要求，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+4+\cdots+n)^2$，所以可直接利用公式求和。

$$\begin{aligned}原式&=(1+2+3+4+\cdots+100)^2\\&=5050^2\\&=25502500\end{aligned}$$

例 5 （1）计算 $61^3+62^3+63^3+\cdots+100^3$

分析 这道题不符合自然数立方和公式 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 的要求，因为它缺了 $1^3+2^3+3^3+\cdots+60^3$，我们可以先把缺少的 $1^3+2^3+3^3+\cdots+60^3$ 补上，补成符合公式要求的形式，然后再把补上的数减掉。

$$\begin{aligned}原式&=(1^3+2^3+3^3+\cdots+100^3)-(1^3+2^3+3^3+\cdots+60^3)\\&=(1+2+3+4+\cdots+100)^2-(1+2+3+\cdots+60)^2\end{aligned}$$

$=5050^2-1830^2$

$=22153600$

(2) 计算 $2^3+4^3+6^3+\cdots+20^3$

分析 这道题不符合自然数立方和公式 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 的要求，但是可以转化，$2^3=2^3\times1^3$，$4^3=2^3\times2^3$，$6^3=2^3\times3^3$，……，$20^3=2^3\times10^3$。提取公因数 2^3 后括号里的数符合自然数立方和公式的要求。

原式 $=2^3\times1^3+2^3\times2^3+2^3\times3^3+\cdots+2^3\times10^3$

$=2^3\times(1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3)$

$=8\times(1+2+3+4+\cdots+10)^2$

$=8\times3025$

$=24200$

例 6 计算 $(2^3+3^3+4^3+\cdots+100^3)-(2^2+3^2+4^2+\cdots+100^2)$

分析 这道题被减数和减数都不符合公式要求：自然数立方和公式是从 $1^3+2^3+3^3+\cdots$ 开始的，缺了 1^3；自然数平方和公式也是从 $1^2+2^2+3^2+\cdots$ 开始的，缺了 1^2。而 $1=1^3=1^2$，根据差不变的性质，被减数和减数同时分别加上一个相等的数 1^3 和 1^2，差不变。

原式 $=(2^3+3^3+4^3+\cdots+100^3)-(2^2+3^2+4^2+\cdots+100^2)$

$=(1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+100^3)-(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+100^2)$

$=(1+2+3+4+\cdots+100)^2-\dfrac{100\times101\times201}{6}$

$=25502500-338350$

$=25164150$

秘籍总结

1. 自然数平方和公式 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. 自然数立方和公式 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+4+\cdots+n)^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

秘籍修炼

练 1 计算 $1+2+3+\cdots+50$

练 2　计算 $1^2+2^2+3^2+\cdots+50^2$

练 3　计算$41^2+42^2+43^2+\cdots+60^2$

练 4　计算 $1^2+3^2+5^2+\cdots+49^2$

练 5　计算 $1^3+2^3+3^3+\cdots+24^3$

练 6　计算 $1^3+3^3+5^3+\cdots+39^3$

第7讲　整数裂项

秘籍导航

一个等差数列,可以按顺序把相邻的 2 个、3 个或 4 个数依次相乘,再求所有乘积相加的和,例如 $3\times5+5\times7+7\times9+\cdots+97\times99$。这样的算式一般很长,单靠一般的运算顺序和计算方法很难求出结果,对于这种类型的题目裂项是一种行之有效的巧算和简算方法。通常的做法是:把算式中的每一项裂变成两项的差,而且原式中的每一项裂变出的前项和后项,恰好能与前一个裂变出的后项、后一个裂变出的前项相互抵消,从而达到“前后抵消,以短制长”的目的。

秘籍攻略

秘籍 1　数列公差为 1 因数个数为 2 的整数裂项

例 1　(1) 按规律进行裂项

$$1\times2=(1\times2\times3-0\times1\times2)\times\frac{1}{3}$$

$$2\times3=(2\times3\times4-1\times2\times3)\times\frac{1}{3}$$

$$3\times4=(3\times4\times5-2\times3\times4)\times\frac{1}{3}$$

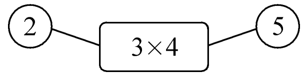
$4\times5=$

$5\times6=$

分析　通过观察,发现等式左边的两个数是公差为 1 的等差数列中的相邻两项,比如 3×4,按照公差为 1 的规律先向后延伸一个数得到 $3\times4\times5$,再向前伸展一个数得到 $2\times3\times4$,它们相减的差除以 3。如图所示,概括成口诀是“后延减前伸,差数除以 3”。

$$4\times5=(4\times5\times6-3\times4\times5)\times\frac{1}{3}$$

$$5\times6=(5\times6\times7-4\times5\times6)\times\frac{1}{3}$$



这么裂项有什么好处呢?从局部看是画蛇添足,但是如果有很多这样的项相加时,裂项之后可以前后抵消,从而达到简算和巧算的目的,比如下面的例题。

(2) 计算 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+9\times10$

分析　这个算式实际上可以看作是等差数列 1,2,3,…,9,10,先将相邻两个数分别相乘,再求所有乘积的和。算式的特点概括为:数列公差为 1,因数个数为 2。

$$1\times2=(1\times2\times3-0\times1\times2)\times\frac{1}{3}$$

$2\times3=(2\times3\times4-1\times2\times3)\times\frac{1}{3}$

$3\times4=(3\times4\times5-2\times3\times4)\times\frac{1}{3}$

……

$9\times10=(9\times10\times11-8\times9\times10)\times\frac{1}{3}$

将以上算式的左边和右边分别累加,左边相加即为所求算式 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+9\times10$;右边是9个分数相加,它们的分母相同,只需把分子相加,分子的中间若干项全部相互抵消,只剩首尾两项。

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+9\times10$

原式 $=\frac{1}{3}\times(1\times2\times3-0\times1\times2+2\times3\times4-1\times2\times3+\cdots+9\times10\times11-8\times9\times10)$

$=\frac{1}{3}\times(9\times10\times11-0\times1\times2)$

$=\frac{9\times10\times11}{3}$

整个算式最后的计算结果,可以用最后一项后延减首项前伸,差数除以1×3。

$=330$

(3) 计算 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$

分析 这个算式可以看作是等差数列 $1,2,3,\cdots,n,(n+1)$,先将相邻两个数分别相乘,再求所有乘积相加的和,其中 $n\times(n+1)=\frac{1}{3}\times[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]$。

原式 $=\frac{1}{3}\times[1\times2\times3-0\times1\times2+2\times3\times4-1\times2\times3+\cdots+n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]$

$=\frac{1}{3}\times[n(n+1)(n+2)-0\times1\times2]$

$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

根据这道题的结论,可以得到公式:

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{n\times(n+1)\times(n+2)}{1\times3}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(4) 计算 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+99\times100$

分析 可以利用公式 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ 直接计算。

原式 $=\frac{1}{3}\times99\times100\times101$

$=333300$

秘籍 2 数列公差为 2 因数个数为 2 的整数裂项

例 2 (1) 计算 $3\times5+5\times7+7\times9+\cdots+97\times99$

分析 这个算式可以看作是等差数列 3,5,7,…,97,99,先将相邻两个数分别相乘,再求所有乘积相加的和。算式的特点概括为:数列公差为 2,因数个数为 2。

$$3\times5=\frac{3\times5\times7-1\times3\times5}{2\times3}=\frac{1}{2\times3}(3\times5\times7-1\times3\times5)$$

$$5\times7=\frac{5\times7\times9-3\times5\times7}{2\times3}=\frac{1}{2\times3}(5\times7\times9-3\times5\times7)$$

$$7\times9=\frac{7\times9\times11-5\times7\times9}{2\times3}=\frac{1}{2\times3}(7\times9\times11-5\times7\times9)$$

整数裂项两边找,先后延,再前伸,相减之差除以N。
N=数列公差×(整数因数个数+1)。

……

$$97\times99=\frac{97\times99\times101-95\times97\times99}{2\times3}=\frac{1}{2\times3}(97\times99\times101-95\times97\times99)$$

将以上算式的左边和右边分别累加,左边相加即为所求的算式 $3\times5+5\times7+7\times9+\cdots+97\times99$;右边是同分母分数相加的算式,分母不变,分子的中间若干项相互抵消,只剩首尾两项。

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{2\times3}\times(3\times5\times7-1\times3\times5+5\times7\times9-3\times5\times7+\cdots+97\times99\times101-\\&\quad 95\times97\times99)\\&=\frac{1}{2\times3}\times(97\times99\times101-1\times3\times5)\\&=161648\end{aligned}$$

整数算式两边找,末项后延,首项前伸,相减之差除以N。
N=数列公差×(整数因数个数+1)。

(2) 计算 $1\times3+3\times5+5\times7+7\times9+\cdots+97\times99$

分析 这个算式和例 2(1)式相近,但是比例 2(1)式多了一项 1×3,前伸出现负数,所以我们不能直接按例 2(1)做,只能把 1×3 单挑出来。然后可以看作是等差数列 3,5,7,…97,99,先将相邻两个数分别相乘,再求所有乘积相加的和。算式的特点概括为:数列公差为 2,因数个数为 2。

$$\begin{aligned}原式&=1\times3+\frac{1}{2\times3}\times(3\times5\times7-1\times3\times5+5\times7\times9-3\times5\times7+\cdots+97\times99\times\\&\quad 101-95\times97\times99)\\&=1\times3+\frac{1}{2\times3}\times(97\times99\times101-1\times3\times5)\\&=3+161648\\&=161651\end{aligned}$$

整数算式两边找,末项后延,首项前伸,相减之差除以N。
N=数列公差×(整数因数个数+1)。

秘籍3 数列公差为1因数个数为3的整数裂项

例3 (1) 计算 $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+97\times98\times99$

分析 这个算式可以看作是等差数列1,2,3,…,98,99,先将相邻三个数分别相乘,再求所有乘积相加的和。算式的特点概括为:数列公差为1,因数个数为3。

$$1\times2\times3=\frac{1\times2\times3\times4-0\times1\times2\times3}{1\times4}=\frac{1}{4}\times(1\times2\times3\times4-0\times1\times2\times3)$$

$$2\times3\times4=\frac{2\times3\times4\times5-1\times2\times3\times4}{1\times4}=\frac{1}{4}\times(2\times3\times4\times5-1\times2\times3\times4)$$

$$3\times4\times5=\frac{3\times4\times5\times6-2\times3\times4\times5}{1\times4}=\frac{1}{4}\times(3\times4\times5\times6-2\times3\times4\times5)$$

……

$$97\times98\times99=\frac{97\times98\times99\times100-96\times97\times98\times99}{1\times4}=\frac{1}{4}\times(97\times98\times99\times100-96\times97\times98\times99)$$

将以上算式的左边和右边分别累加,左边相加即为所求算式 $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+97\times98\times99$;右边是同分母分数相加,分母不变,分子的中间若干项相互抵消,只剩首尾两项。

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{4}\times(1\times2\times3\times4-0\times1\times2\times3+2\times3\times4\times5-1\times2\times3\times4+\cdots+97\times98\times99\times100-96\times97\times98\times99)\\&=\frac{1}{4}\times(97\times98\times99\times100-0\times1\times2\times3)\\&=23527350\end{aligned}$$

整个算式两边找,末项后延,首项前伸,
相减之差除以N。
N=数列公差×(整数因数个数+1)。

根据这道题的结论,可以概括公式:

$$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

(2) 计算 $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+18\times19\times20$

分析 可以利用公式 $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ 直接计算。

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{4}\times18\times19\times20\times21\\&=35910\end{aligned}$$

秘籍4 数列公差为2因数个数为3的整数裂项

例4 计算 $2\times4\times6+4\times6\times8+6\times8\times10+\cdots+16\times18\times20$

分析 这个算式可以看作是等差数列2,4,6,…,18,20,先将相邻三个数分别相乘,再求所有乘积相加的和。算式的特点概括为:数列公差为2,因数个数为3。

$2\times4\times6=\dfrac{2\times4\times6\times8-0\times2\times4\times6}{2\times4}=\dfrac{1}{8}\times(2\times4\times6\times8-0\times2\times4\times6)$

$4\times6\times8=\dfrac{4\times6\times8\times10-2\times4\times6\times8}{2\times4}=\dfrac{1}{8}\times(4\times6\times8\times10-2\times4\times6\times8)$

$6\times8\times10=\dfrac{6\times8\times10\times12-4\times6\times8\times10}{2\times4}=\dfrac{1}{8}\times(6\times8\times10\times12-4\times6\times8\times10)$

……

$16\times18\times20=\dfrac{16\times18\times20\times22-14\times16\times18\times20}{2\times4}=\dfrac{1}{8}\times(16\times18\times20\times22-14\times16\times18\times20)$

将以上算式的左边和右边分别累加,左边相加即为所求算式 $2\times4\times6+4\times6\times8+6\times8\times10+\cdots+16\times18\times20$;右边是同分母分数相加,分母不变,分子中间若干项全部抵消,只剩首尾两项。

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{8}\times(2\times4\times6\times8-0\times2\times4\times6+4\times6\times8\times10-2\times4\times6\times8+\cdots+16\times18\times20\times22-14\times16\times18\times20)\\
&=\frac{1}{8}\times(16\times18\times20\times22-0\times2\times4\times6)\\
&=\frac{1}{8}\times16\times18\times20\times22\\
&=15840
\end{aligned}
$$

整个算式两边找,末项后延,首项前伸,相减之差除以N。
N=数列公差×(整数因数个数+1)。

秘籍 5 数列公差为 6 因数个数为 3 的整数裂项

例 5 计算 $10\times16\times22+16\times22\times28+22\times28\times34+\cdots+70\times76\times82$

分析 这个算式可以看作是等差数列 10,16,22,…,76,82,先将相邻三个数分别相乘,再求所有乘积相加的和。算式的特点概括为:数列公差为 6,因数个数为 3。

$10\times16\times22=\dfrac{10\times16\times22\times28-4\times10\times16\times22}{6\times4}=\dfrac{1}{24}\times(10\times16\times22\times28-4\times10\times16\times22)$

$16\times22\times28=\dfrac{16\times22\times28\times34-10\times16\times22\times28}{6\times4}=\dfrac{1}{24}\times(16\times22\times28\times34-10\times16\times22\times28)$

$22\times28\times34=\dfrac{22\times28\times34\times40-16\times22\times28\times34}{6\times4}=\dfrac{1}{24}\times(22\times28\times34\times40-16\times22\times28\times34)$

……

$70\times76\times82=\dfrac{70\times76\times82\times88-64\times70\times76\times82}{6\times4}=\dfrac{1}{24}\times(70\times76\times82\times88-64\times70\times76\times82)$

将以上算式的左边和右边分别累加,左边相加即为所求算式 $10\times16\times22+16\times22\times28+22\times28\times34+\cdots+70\times76\times82$;右边是同分母分数相加,分母不变,分

子的中间若干项全部抵消，只剩首尾两项。

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{24}\times(10\times16\times22\times28-4\times10\times16\times22+16\times22\times28\times34-10\times16\times\\&\quad 22\times28+\cdots+70\times76\times82\times88-64\times70\times76\times82)\\&=\frac{1}{24}\times(70\times76\times82\times88-4\times10\times16\times22)\\&=1598960\end{aligned}$$

整个算式两边找，末项后延，首项前伸，相减之差除以N。
N=数列公差×（整数因数个数+1）。

秘籍6　不符合要求的算式先变形再裂项

例6 （1）计算 $1\times3+2\times4+3\times5+4\times6+\cdots+98\times100+99\times101$

分析 这个算式是两个符合裂项要求的算式交叉混合形成的算式，直接计算难度很大，如果先分拆成两个符合整数裂项要求的算式，再计算就容易多了。

$$\begin{aligned}原式&=(1\times3+3\times5+5\times7+\cdots+99\times101)+(2\times4+4\times6+\cdots+98\times100)\\&=\left(\frac{99\times101\times103-1\times3\times5}{2\times3}+3\right)+\frac{98\times100\times102-0\times2\times4}{2\times3}\\&=338250\end{aligned}$$

（2）计算 $1\times2+3\times4+5\times6+7\times8+\cdots+99\times100$

分析 $3\times4=2\times4+4$，$5\times6=4\times6+6$，$7\times8=6\times8+8$，……

$$\begin{aligned}原式&=2+(2\times4+4)+(4\times6+6)+(6\times8+8)+\cdots+(98\times100+100)\\&=(2+4+6+8+\cdots+100)+(2\times4+4\times6+6\times8+\cdots+98\times100)\\&=102\times50\div2+\frac{98\times100\times102}{2\times3}\\&=2550+166600\\&=169150\end{aligned}$$

秘籍总结

整数裂项算式的主要特点：从等差数列中依次取出若干个相邻的数相乘，再把所有的乘积相加。

整数裂项的方法是：先把算式中的最后一项按规律向后延伸一个数，再把算式中最前面的一项按规律向前伸展一个数，用它们的差除以 N（N = 数列公差 ×（整数因数个数 +1））。

将上述方法概括成口诀：等差数列数，相邻几个乘，所有积相加，裂项来求和，后延减前伸，差数除以 N，（N = 数列公差 ×（整数因数个数 +1））。

需要注意的是：按照公差向前伸展时，当伸展数小于 0 时，可以取负数，当然几个相邻数的乘积也是，由于只是没学过负数运算，可以先把第一项甩出来，按照口诀先算出后面的结果，再加上第一项。

秘籍修炼

练 1 计算 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+49\times50$

练 2 计算 $1\times4+4\times7+7\times10+\cdots+49\times52$

练 3 计算 $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+9\times10\times11$

练 4 计算 $1\times3\times5+3\times5\times7+5\times7\times9+\cdots+17\times19\times21$

练 5 计算 $9\times15\times21+15\times21\times27+21\times27\times33+\cdots+69\times75\times81$

练 6 计算 $1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+3\times4\times5\times6+\cdots+9\times10\times11\times12$

第8讲　归纳与递推

秘籍导航

1. 了解斐波那契数列特点及相关题目。
2. 能用通项归纳的方法解答整数裂项、拆分题目。
3. 熟练掌握“归纳与递推”的方法。

秘籍攻略

秘籍 1　斐波那契数列的应用

例 1　一般而言,兔子在出生两个月后,就有繁殖能力,变为成年兔,一对兔子每个月能生出一对小兔子来。如果所有兔子都不死,开始时只有一对小兔,那么一年以后可以繁殖多少对兔子?

分析

第一个月:1 对
第二个月:1 对
第三个月:$1+1=2$ 对
第四个月:$1+2=3$ 对
……
1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,因此一年后有 144 对兔子。

这就是著名的斐波那契数列:从第三个数起,每一个数都是与它相邻的前两个数之和。

因为它与兔子繁殖数据有关,所以也叫“兔子数列”。

例 2　一层楼台阶有 10 级,每次可以登上一级或者两级台阶,那么登上这 10 级台阶一共有多少种不同的方法?

分析　如果直接研究 10 级台阶,很难找到答案。我们先来看看 1 级、2 级、3 级台阶的情况:

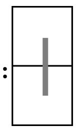
1 级:1 种　$1=1$
2 级:2 种　$2=1+1=2$
3 级:3 种　$3=1+1+1=1+2=2+1$
4 级:5 种　$4=1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=2+2$
……

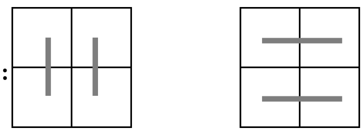
发现随着台阶数量的增加,登上台阶的方法种数呈现斐波那契数列增长。递推到 10 级台阶时的种数为 89 种。

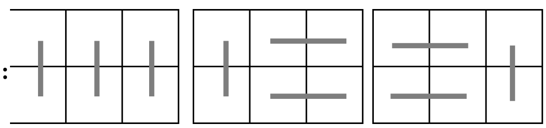
1,2,3,5,8,13,21,34,55,89

例 3 用 7 张 1 ×2 的长方形覆盖下图,一共有多少种不同的覆盖方法?

分析

1 ×2 的长方形: 1=1 **共1种**

2 ×2 的长方形: 2=1+1=2 **共2种**

3 ×2 的长方形: 3=1+1+1=1+2=2+1 **共3种**

依次为:1,2,3,5,8,13,21

所以,7 张卡片一共有 21 种覆盖方法。

这道题其实就是登台阶问题的题型,俯视楼梯就是覆盖上图的这种效果。斐波那契数列的再一次应用。有兴趣的同学可以研究一下一步可以登 1 级、2 级或者 3 级台阶的题目。

秘籍 2 通项公式的应用

例 4 把自然数依次排成下面的数阵图

1, 2, 4, 7……
3, 5, 8,……
6, 9,……
10,……
……

如果规定横为行,纵为列。(如 8 排在第 2 行第 3 列)求:

(1)第 10 行第 5 列数是多少?

(2)第 5 行第 10 列数是多少?

分析

(1)观察上面数阵图中自然数是从 1 开始,沿着斜线方向从小到大排列的。如果要知道第 10 行第 5 列数是多少,必须清楚这个数在第几条斜线上。

第 10 行第 1 列数在第 10 条斜线上;

第 10 行第 2 列数在第 11 条斜线上;

……

第 10 行第 5 列数在第 14 条斜线上；

第 14 条斜线上的最后一个数应该是 $1+2+3+\cdots+14=105$，这个数在第 14 行第 1 列，需要再退后 4 个数就是第 10 行第 5 列数了，所以这个数为 $105-4=101$。

（2）第 5 行第 10 列是多少的情况类似：首先找到所在斜线为第 14 条，最后一个数仍是 105，只不过这次要后退 9 个数，才是第 5 行第 10 列数。那个数是 $105-9=96$。

总结发现，行与列的和减去 1 就是所求数所在的斜线数，后退的数正好比列数减少 1。当题目要求 a 行 b 列的时候，就首先计算从 1 到 $(a+b-1)$ 的总和，再减去 $(b-1)$，结果就是所求数据。

例 5　（1）计算 $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}$

分析

这道算式的分母部分都是从 1 开始的连续自然数求和，可以用 $1+2+3+\cdots+n$ 表示。

通项归纳为：

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{(1+n)n}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+2\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\\&=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\\&=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{11}\right)\\&=\frac{20}{11}\end{aligned}$$

（2）计算 $\dfrac{1^2+2^2}{1\times2}+\dfrac{2^2+3^2}{2\times3}+\cdots+\dfrac{2012^2+2013^2}{2012\times2013}+\dfrac{2013^2+2014^2}{2013\times2014}$

分析　方法一：可以先来分析一下它的通项情况，

$$a_n=\frac{n^2+(n+1)^2}{n\times(n+1)}=\frac{n^2}{n\times(n+1)}+\frac{(n+1)^2}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n}$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left(\frac{2}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{4}+\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{2013}{2012}+\frac{2012}{2013}\right)+\left(\frac{2014}{2013}+\frac{2013}{2014}\right)\\&=2013\times2+\frac{2013}{2014}=4026\frac{2013}{2014}\end{aligned}$$

方法二：$a_n=\dfrac{n^2+(n+1)^2}{n\times(n+1)}=\dfrac{2n^2+2n+1}{n^2+n}=2+\dfrac{1}{n^2+n}=2+\dfrac{1}{n\times(n+1)}$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2+\frac{1}{1\times2}+2+\frac{1}{2\times3}+\cdots+2+\frac{1}{2012\times2013}+2+\frac{1}{2013\times2014}\\&=2013\times2+\left(1-\frac{1}{2014}\right)\end{aligned}$$

$=4026\frac{2013}{2014}$

例 6 在印度,有一个古老的传说。在世界中心贝拿勒斯(在印度北部)的圣庙里,一块黄铜板上插着三根宝石针。印度教的主神梵天在创造世界的时候,在其中一根针上从下到上地穿好了由大到小的 64 片金片,这就是所谓的汉诺塔。不论白天黑夜,总有一个僧侣在按照下面的法则移动这些金片:一次只移动一片,不管在哪根针上,小片必须在大片上面。僧侣们预言,当所有的金片都从梵天穿好的那根针上移到另外一根针上时,世界就将在一声霹雳中消灭,而梵塔、庙宇和众生也都将同归于尽。请问如果这个传说是真的,完成 64 片的移动至少需要多少步呢?

分析

第 1 个和尚想:要是有一个人能把前 63 个盘子先移动到第二个柱子上,我再把最后一个盘子直接移动到第三个柱子,再让那个人把刚才的前 63 个盘子从第二个柱子上移动到第三个柱子上,我的任务就完成了;现在只需找一个人移动 63 个盘子即可。

第 2 个和尚想:要是有一个人能把前 62 个盘子先移动到第二个柱子上,我再把最后一个盘子直接移动到第三个柱子,再让那个人把刚才的前 62 个盘子从第二个柱子上移动到第三个柱子上,我的任务就完成了;现在只需找一个人移动 62 个盘子即可。

第 3 个和尚想:把移动前 61 个盘子的任务依葫芦画瓢的交给了第 4 个和尚,等等递推下去,直到把任务交给了第 64 个和尚为止,这时候他这里盘子已经只有一个了。

从上面分析看出,只有第 64 个和尚的任务完成了,第 63 个和尚的任务才能完成,……,只有第 2 个和尚的任务完成后,第 1 个和尚的任务才能完成。这是一个典型的递推问题。

所以我们在完成这道题目的时候也可以这样想,需要研究 1 片、2 片、3 片……完成任务步骤有什么规律呢?

1 片:1 步

2 片:$2\times1+1=2+1=2^2-1=3$ 步

3 片:$2\times3+1=2^2+2+1=2^3-1=7$ 步

……

64 片:$1+2+4+8+\cdots+2^{63}=2^{64}-1$

2^{64}是一个天文数字,有兴趣的同学可以查查这个数字。

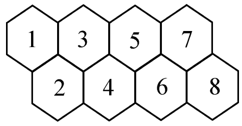
最后拓展到 n 片的步骤:$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

秘籍修炼

练 1 找规律填空:1,1,1,3,5,9,17,31,(　　),(　　)

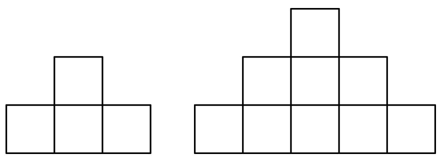
练 2 有 8 块相同的巧克力糖,从今天开始每天至少吃一块,最多吃两块,吃完为止,共有多少种不同的吃法?

练 3　小蜜蜂通过蜂巢房间，规定：只能从小号房间进入大号房间，问小蜜蜂由 1 号房间走到 8 号房间有多少种方法？

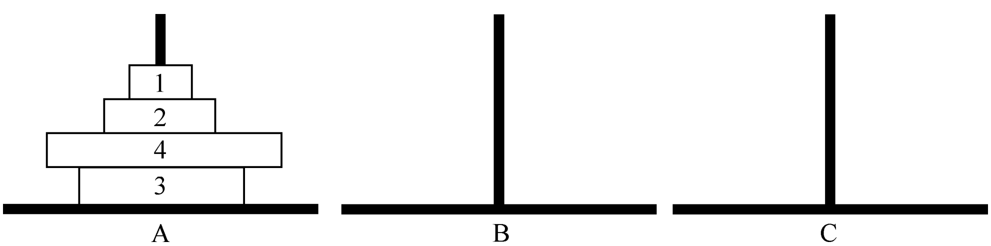


练 4　计算$\frac{2^2}{3^2-1}\times\frac{4^2}{5^2-1}\times\frac{6^2}{7^2-1}\times\cdots\times\frac{2012^2}{2013^2-1}=$________

练 5　下图的两个图形是分别用 13 根和 26 根单位长的小棍围成的。如果按此规律（每一层比上面一层多摆出两个小正方形）围成的图形共用了 60 多根小棍，那么围成的图形共用了多少根小棍？



练 6　移动下图汉诺塔 A 柱上面的 4 个盘子到 C 柱，要求最后盘子编号由小到大从上到下排列，并且每次只能移动一个盘子，在移动的过程中，编号较大的盘子不能放在编号较小的盘子上面，至少需要多少步能完成？



第9讲　比与比例

秘籍导航

1. 学习求比值、化简比、化连比的方法和技巧。
2. 学会判断给出的 4 个数能否组成比例，学会解比例。

秘籍攻略

秘籍 1　与"比"相关的计算

例 1　求比值：(1)24∶30　　(2)0.6∶0.24　　(3)$\frac{5}{6}:\frac{1}{2}$　　(4)$\frac{5}{16}:0.75$

分析　用比的前项除以后项所得的商是比值，比值是一个数，可以是整数、小数或分数。

(1)原式 $=24\div30=\frac{4}{5}$

(2)原式 $=0.6\div0.24=2.5$

(3)原式 $=\frac{5}{6}\div\frac{1}{2}=\frac{5}{3}$

(4)原式 $=\frac{5}{16}\div0.75=\frac{5}{12}$

例 2　(1)　把 75∶90 化为最简单的整数比。

分析　两个整数比，化简时前项和后项直接除以它们的最大公因数。

原式 $=(75\div15):(90\div15)=5:6$

还可以这样化简：

原式 $=75\div90=\frac{75}{90}=\frac{5}{6}$

(2) 把$\frac{1}{10}:\frac{3}{8}$化为最简单的整数比。

分析　两个分数比，可以把比的前项和后项同时乘以两个分母的最小公倍数。

原式 $=\left(\frac{1}{10}\times40\right):\left(\frac{3}{8}\times40\right)=4:15$

还可以这样化简：

原式 $=\frac{1}{10}\div\frac{3}{8}=\frac{1}{10}\times\frac{8}{3}=\frac{4}{15}$

(3) 把 1.25∶3 化为最简单的整数比。

分析　化简小数比，一般是把比的前项和后项同时乘以 10，100，1000，…，变为整

数比，再化简。

原式 $=(1.25\times100):(3\times100)=125:300=5:12$

还可以这样化简：

原式 $=\frac{5}{4}\div3=\frac{5}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$

（4）把 $\frac{2}{15}:3.4$ 化为最简单的整数比。

分析 比的前项和后项是整数、小数、分数的混合比，化简时要灵活运用前面的几种方法。

原式 $=\frac{2}{15}:\frac{17}{5}=\left(\frac{2}{15}\times15\right):\left(\frac{17}{5}\times15\right)=2:51$

还可以这样化简：

原式 $=\frac{2}{15}\div\frac{17}{5}=\frac{2}{15}\times\frac{5}{17}=\frac{2}{51}$

例 3 （1）若甲：乙 $=5:3$，乙：丙 $=4:7$，则甲：乙：丙 $=$ ？

（2）若 $\frac{1}{2}a=\frac{2}{3}b=\frac{4}{5}c$，求 $a:b:c$。

分析 （1）对于单比化连比的题目，关键是找到中间“桥梁”，这道题“乙数”就是这个中间“桥梁”。

$$\begin{array}{llllll} 甲: & \boxed{乙} & = 5:3 & = 20 : & \boxed{12} & \\ & \boxed{乙} & :丙 = 4 : 7 = & & \boxed{12} & :21 \end{array} \quad 甲:乙:丙=20:12:21$$

（2）令 $\frac{1}{2}a=\frac{2}{3}b=\frac{4}{5}c=1$

$a=1\div\frac{1}{2}=2$，$b=1\div\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$，$c=1\div\frac{4}{5}=\frac{5}{4}$。

$a:b:c=2:\frac{3}{2}:\frac{5}{4}=8:6:5$

秘籍 2　与“比例”相关的计算

例 4 判断下面每组的四个数是否可以组成比例？如果能，请写出比例。

（1）8，6，12 和 16　　　　（2）$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，1，$\frac{1}{6}$

分析 判断 4 个数能否组成比例，要根据比例的基本性质“两个外项之积等于两个内项之积”。每组 4 个数，看最大数与最小数的乘积是否等于中间两个数的乘积。

（1）因为 $16\times6=8\times12=96$，所以，8，6，12，16 可以组成比例。

$8:6=16:12$　　$6:8=12:16$

$8:16=6:12$　　$8:12=8:16$

$16:8=12:6$　　$12:6=16:8$

$16:12=8:6$　　$12:16=6:8$

(2)因为$1\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$,所以,$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{4}$,1,$\frac{1}{6}$可以组成比例。

$$\frac{2}{3}:1=\frac{1}{6}:\frac{1}{4}\qquad\frac{1}{4}:\frac{1}{6}=1:\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}:\frac{1}{6}=1:\frac{1}{4}\qquad\frac{1}{4}:1=\frac{1}{6}:\frac{2}{3}$$

$$1:\frac{2}{3}=\frac{1}{4}:\frac{1}{6}\qquad\frac{1}{6}:\frac{1}{4}=\frac{2}{3}:1$$

$$1:\frac{1}{4}=\frac{2}{3}:\frac{1}{6}\qquad\frac{1}{6}:\frac{2}{3}=\frac{1}{4}:1$$

例 5 (1) 解比例① $8:12=x:45$　　② $0.4:x=1.2:2$

分析 根据比例的基本性质,如果已知比例中的任何三项,就可以求出这个比例中的另外一项。求比例中的未知项叫做解比例。

①$12x=8\times45$

$x=\frac{8\times45}{12}$

$x=30$

②$1.2x=0.4\times2$

$x=\frac{0.4\times2}{1.2}$

$x=\frac{2}{3}$

(2) 解比例　① $\frac{1.2}{75}=\frac{0.4}{x}$　　② $\frac{3}{x}=\frac{12}{2.4}$

分析 像本题这两个写成分数形式的比例,可以利用“十字交叉”相乘的办法,先转化为乘法等式,然后再解。

① $1.2x=75\times0.4$,

$x=\frac{75\times0.4}{1.2}$

$x=25$

② $12x=3\times2.4$

$x=\frac{3\times2.4}{12}$

$x=0.6$

例 6 (1) 解比例　① $\frac{x}{10}=\frac{1}{4}:\frac{1}{3}$　　② $6:1.2=\frac{x}{0.4}$

分析 对于等号一边是比的形式,另一边是分数形式的比例,可以先把两边统一成比的形式,再根据比例的基本性质转化为乘法等式。

① $x:10=\frac{1}{4}:\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}x=10\times\frac{1}{4}$

$x=10\times\frac{1}{4}\div\frac{1}{3}$

$x=\frac{15}{2}$

② $6:1.2=x:0.4$

$1.2x=6\times0.4$

$x=\frac{6\times0.4}{1.2}$

$x=2$

(2) 解比例 $(x+5):(2x-6)=18:4$

分析 对于等号两边都是比的形式,可以直接根据比例的基本性质转化为乘法等式。

$18(2x-6)=4(x+5)$

$36x-108=4x+20$

$32x=128$

$x=4$

秘籍总结

两数相除也叫比,两比相等叫比例。
四数是否成比例,从小到大排次序,
两端中间积相等,四数便可成比例。
解出比例未知项,比例性质不能忘,
外项内项积相等,十字交叉来相乘。

秘籍修炼

练 1 化简下面各比

(1) $1.5:3.7$　　(2) $\frac{2}{15}:\frac{8}{27}$　　(3) $3.2:\frac{8}{15}$

练 2 若 $A:B=3:7$, $B:C=2:3$, 则 $A:B:C=?$

练 3 判断下面每组的四个数可以组成比例吗？能组成的把比例写出来。

(1) 1，6，12 和 2　　(2) $\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{5}$和$\frac{1}{4}$

练 4 解比例 $2:9=\frac{1}{2}:x$

练 5 解比例 $4:\frac{2}{3}=\frac{x}{25}$

练 6 解比例$\frac{2}{25}=\frac{x}{30}$

第10讲　解分数系数方程

秘籍导航

巩固整数系数方程的解法,学习解分数系数方程,掌握解分数系数方程的基本步骤。

(1)去分母:在方程的左右两边同时乘以分母的最小公倍数,通过约分的方法消掉分母。把分数系数方程转化为整数系数方程。

(2)去括号:利用乘法分配律和去括号法则,先去小括号,再去中括号,最后去大括号。

(3)移项:把含有未知数的项移到方程的一边,常数项移到另一边,移项"过桥"要变号。

(4)合并同类项:数与数合并,x 项与 x 项合并。

(5)未知数 x 的系数化为 1。

(6)检验。

秘籍攻略

秘籍 1　复习整数系数方程

解方程的依据是等式的两个基本性质。

性质 1:等式的两边都加上(或减去)同一个数,所得的结果仍是等式。

性质 2:等式的两边都乘以(或除以)同一个数(除数不为零),所得的结果仍是等式。

例 1　(1) 解方程 $47-3x=12+4x$

分析　这个方程等号两边都有未知数 x,也都有常数。先移项,把含 x 的项都移到等号的一边,把常数项移到等号的另一边。

$47-12=4x+3x$　("过桥"变号,小往大处靠)

$35=7x$　(合并同类项)

$x=5$　(未知数 x 的系数化为 1)

检验,左边 $=47-3\times5=32$;右边 $=12+4\times5=32$,

左边 = 右边, 所以 $x=5$ 是原方程的解。

(2) 解方程 $166-5\times(x+7)=6x+10$

分析　这个方程中有括号,先根据乘法分配律和去括号法则去掉括号。

$166-(5x+35)=6x+10$　(乘法分配律)

$166-5x-35=6x+10$　(去括号法则)

$131-5x=6x+10$　(等号左边数与数合并)

$131-10=6x+5x$　(移项:"过桥"变号)

$121=11x$　(合并同类项)

$x=11$　(未知数 x 的系数化为 1)

检验:左边 $=166-5\times(11+7)=76$;

右边 $=6\times11+10=76$，

左边 = 右边，所以 $x=11$ 是原方程的解。

(3) 解方程 $7x+(3x-20)=x-2(7-3x)$

分析 这个方程等号的左右两边都有括号，都含有未知数 x。先去掉括号，然后合并同类项。

$7x+3x-20=x-14+6x$ （去括号）

$10x-20=7x-14$ （同并同类项）

$10x-7x=20-14$ （移项："过桥"变号）

$3x=6$ （合并同类项）

$x=2$ （未知数 x 的系数化为 1）

检验：左边 $=7\times2+(3\times2-20)=0$；

右边 $=2-2(7-3\times2)=0$，

左边 = 右边，所以 $x=2$ 是原方程的解。

秘籍 2 去分母化分数系数方程为整数方程

对于分数系数方程，等号两边同时乘以分母的最小公倍数，通过约分的方法约掉分母，将分数系数方程转化为整数系数方程。

例 2 (1) 解方程 $\frac{1}{5}x=\frac{7}{15}$

分析 等号两边同时乘以分母 5 和 15 的最小公倍数 15，先约掉分母，把分数系数方程转化为整数系数方程。

$15\times\frac{1}{5}x=\frac{7}{15}\times15$ （方程两边同时乘以 15，约掉分母）

$3x=7$

$x=\frac{7}{3}$

检验：左边 $=\frac{1}{5}\times\frac{7}{3}=\frac{7}{15}=$ 右边，所以 $x=\frac{7}{3}$ 是原方程的解。

(2) 解方程 $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=28$

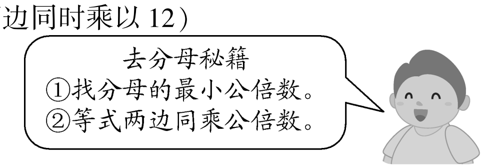
分析 方法一：等号两边同时乘以分母 3 和 4 的最小公倍数 12，约掉分母，把分数系数方程转化为整数系数方程。需要注意的是等号两边都要乘以 12，没有分母的常数项"28"也要乘以 12。

$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=28$

$12\times\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\times12=28\times12$ （方程两边同时乘以 12）

$4x+3x=28\times12$ （约分）

$7x=28\times12$ （合并同类项）



$x=4\times12$　（等式两边同时除以 7）

$x=48$　（未知数 x 的系数化为 1）

方法二：$\dfrac{4x}{12}+\dfrac{3x}{12}=28$

$\dfrac{7x}{12}=28$

$x=28\times\dfrac{12}{7}$

$x=48$

检验：左边 $=\dfrac{48}{3}+\dfrac{48}{4}=16+12=28=$ 右边，所以 $x=48$ 是原方程的解。

例 3　（1）解方程 $\dfrac{2x+5}{5}-\dfrac{x+4}{3}=0$

分析　根据等式性质，方程两边同时乘以 5 和 3 的最小公倍数 15，约掉分母，把分数系数方程转化为整数系数方程。

$\dfrac{2x+5}{5}\times15-\dfrac{x+4}{3}\times15=0\times15$　（等号两边都要乘以 15，不要漏掉常数 0）

$(2x+5)\times3-(x+4)\times5=0$　（约分时分子作为一个整体，需要加括号）

$6x+15-5x-20=0$　（利用乘法分配律去括号得）

$x-5=0$　（合并同类项得）

$x=5$　（把 x 写在等式左边，系数化为 1 得）

检验：左边 $=\dfrac{2\times5+5}{5}-\dfrac{5+4}{3}=3-3=0=$ 右边，所以 $x=5$ 是原方程的解。

（2）解方程 $\dfrac{x+2}{4}-\dfrac{2x-3}{6}=1$

分析　方程两边同时乘以分母 4 和 6 的最小公倍数 12，约掉分母，把分数系数方程转化为整数系数方程。

$\dfrac{x+2}{4}\times12-\dfrac{2x-3}{6}\times12=1\times12$（等号两边同时乘以 12）

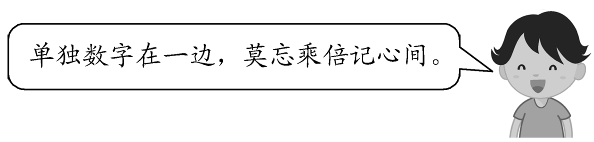
$(x+2)\times3-(2x-3)\times2=12$　（约分时分子作为一个整体，需要加括号）

$3x+6-4x+6=12$　（根据乘法分配律和去括号法则去括号得）

$12-x=12$　（合并同类项得）

$x=12-12$（减数 = 被减数 − 差）

$x=0$　（把 x 写在等式左边，系数化为 1 得）



检验：左边 $=\dfrac{0+2}{4}-\dfrac{2\times0-3}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1=$ 右边，所以 $x=0$ 是原方程的解。

例 4 (1) 解方程 $\frac{x+2}{3}-\frac{x-1}{4}=\frac{6x-1}{5}$

分析 方程两边同时乘以分母 3、4、5 的最小公倍数 60，约掉分母，把分数系数方程转化为整数系数方程。约分时注意分子作为一个整体，需要加括号。

$\frac{x+2}{3}\times 60-\frac{x-1}{4}\times 60=\frac{6x-1}{5}\times 60$ （方程两边同时乘以 60）

$(x+2)\times 20-(x-1)\times 15=(6x-1)\times 12$ （约分时分子作为一个整体，需要加括号）

$20x+40-15x+15=72x-12$ （根据乘法分配律和去括号法则去括号得）

$55+5x=72x-12$ （合并同类项得）

$55+12=72x-5x$ （“过桥”要变号，小往大处靠得）

$67=67x$ （合并同类项得）

$x=1$ （把 x 写在等式左边，系数化为 1 得）

检验：左边 $=\frac{1+2}{3}-\frac{1-1}{4}=1-0=1$；右边 $=\frac{6\times 1-1}{5}=1$

左边 = 右边 = 1，所以 $x=1$ 是原方程的解。

(2) 解方程 $\frac{3}{2}\times\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\right]=5x$

分析 方程中有小括号和中括号，先去小括号，再去中括号。

$\frac{3}{2}\times[2x-1+2]=5x$ （用乘法分配律去掉小括号得）

$\frac{3}{2}\times[2x+1]=5x$ （中括号内合并常数项得）

$3x+\frac{3}{2}=5x$ （用乘法分配律去掉中括号得）

$\frac{3}{2}=2x$ （等式两边同时减去 $3x$ 得）

$x=\frac{3}{4}$ （把 x 写在等号左边，并且把 x 的系数化为 1 得）

检验：左边 $=\frac{3}{2}\times\left[2\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+2\right]=\frac{3}{2}\times\left[2\times\frac{1}{4}+2\right]=\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{4}$；

右边 $=5\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$，

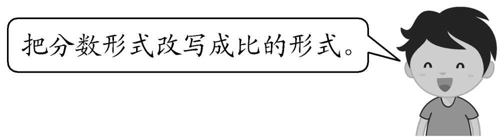
左边 = 右边 $=\frac{15}{4}$，所以 $x=\frac{3}{4}$ 是原方程的解。

例 5 (1) 解方程 $\frac{x-5}{x+5}=\frac{3}{4}$

分析 这个方程可以改写成比例的形式，$(x-5):(x+5)=3:4$，然后根据比例的基本性质“外项之积等于内项之积”，把原方程转化为 $4(x-5)=3(x+5)$，从而去

掉分母。当然,也可以用“十字交叉”相乘的方法直接转化。

$$(x-5):(x+5)=3:4$$



$$4(x-5)=3(x+5)$$
$$4x-20=3x+15$$
$$4x-3x=15+20$$
$$x=35$$

检验:左边 $=\dfrac{35-5}{35+5}=\dfrac{30}{40}=\dfrac{3}{4}=$ 右边,所以 $x=35$ 是原方程的解。

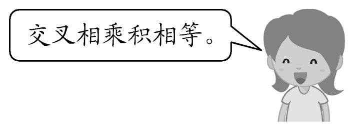
(2) 解方程 $\dfrac{3x-5}{2}=\dfrac{62-2x}{4}$

分析 这个方程可以在等式的两边同时乘以 4 从而约去分母;也可以用“十字交叉”相乘的方法把原方程转化为整数方程。

$(3x-5)\times4=(62-2x)\times2$ (“十字交叉”相乘得)

$12x-20=124-4x$ (乘法分配律得)

$12x+4x=124+20$ (移项,“过桥”变号得)



$16x=144$ (合并同类项得)

$x=9$

检验:左边 $=\dfrac{3\times9-5}{2}=11$; 右边 $=\dfrac{62-2\times9}{4}=\dfrac{44}{4}=11$,

左边 = 右边 = 11,所以 $x=9$ 是原方程的解。

秘籍3　分母中有小数的分数方程

例6 (1) 解方程 $\dfrac{0.7x}{0.3}=1\dfrac{2}{3}+\dfrac{1.2-0.3x}{0.2}$

分析 方程中的分母含有小数,直接去分母比较麻烦,可以先用分数的基本性质,分子分母同时扩大 10 倍,化小数为整数,然后再继续解方程。

$\dfrac{7x}{3}=\dfrac{5}{3}+\dfrac{12-3x}{2}$ (分子分母都扩大 10 倍得)

$7x\times2=5\times2+(12-3x)\times3$ (方程两边同时乘 6,约分得)

$14x=10+36-9x$

$14x+9x=10+36$ (移项得)

$23x=46$

$x=2$

检验:左边 $=\dfrac{0.7\times2}{0.3}=\dfrac{14}{3}=4\dfrac{2}{3}$; 右边 $=1\dfrac{2}{3}+\dfrac{1.2-0.3\times2}{0.2}=1\dfrac{2}{3}+3=4\dfrac{2}{3}$,

左边 = 右边 $=4\dfrac{2}{3}$,所以 $x=2$ 是原方程的解。

(2) 解方程 $\dfrac{0.4x+0.9}{0.5}-\dfrac{0.03+0.02x}{0.03}=\dfrac{x-5}{2}$

分析 根据分数的基本性质，$\dfrac{0.4x+0.9}{0.5}$的分子分母同时扩大 10 倍转化为$\dfrac{4x+9}{5}$；$\dfrac{0.03+0.02x}{0.03}$的分子和分母同时扩大 100 倍转化为$\dfrac{3+2x}{3}$，化小数为整数，然后再继续解方程。

$$\frac{4x+9}{5}-\frac{3+2x}{3}=\frac{x-5}{2}$$

$$\frac{4x+9}{5}\times30-\frac{3+2x}{3}\times30=\frac{x-5}{2}\times30$$

$$(4x+9)\times6-(3+2x)\times10=(x-5)\times15$$

$$24x+54-30-20x=15x-75$$

$$24+4x=15x-75$$

$$24+75=15x-4x$$

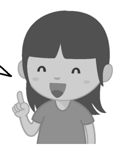
$$99=11x$$

$$x=9$$

检验：左边 $=\dfrac{0.4\times9+0.9}{0.5}-\dfrac{0.03+0.02\times9}{0.03}=2$；右边 $=\dfrac{9-5}{2}=2$，

左边 = 右边 = 2，所以 $x=9$ 是原方程的解。

分数中有小数，上下扩大或缩小相同的倍数，与其他项无关。
依据——分数的基本性质。



秘籍总结

分数方程需转化，等号两边都扩大。
约去分母变整数，方程到此好解啦！

秘籍修炼

练 1 解方程 $5(x-3)=3x+7$

练 2 解方程 $\dfrac{x}{5}-\dfrac{x}{8}=6$

练 3　解方程 $\frac{5y-1}{6}=\frac{7}{3}$

练 4　解方程 $\frac{x+4}{3}-\frac{3-x}{2}=1$

练 5　解方程 $\frac{x-11}{x+23}=\frac{1}{3}$

练 6　解方程 $\frac{0.5x-0.4}{0.4}=1+\frac{0.2x+0.1}{0.3}$

第11讲　解方程组

秘籍导航

含有两个未知数,并且未知数的最高次数都是 1 的方程叫作二元一次方程,例如,$4x-3y=5$。二元一次方程有无数个解,x 随便取一个数,y 都有唯一确定的值与之对应。

两个二元一次方程联合在一起,就组成了二元一次方程组,例如$\begin{cases}x+y=5,\\2x+3y=11,\end{cases}$二元一次方程组的两个方程的公共解,叫作二元一次方程组的解。正常情况下,二元一次方程组只有一组解。

二元一次方程组有两个未知数,如果消去其中一个,将二元一次方程组转化为一元一次方程就可以解出一个未知数,然后再设法求另一未知数。这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想,叫作消元思想。三元一次方程组或多元一次方程组都可用消元的思想求解。消元的方法有两种:带入消元法或加减消元法。

秘籍攻略

秘籍 1　代入消元

把一个未知数用另一个未知数来表示,以此达到减少未知数(消元)的目的。当方程组中某一个方程 x 或 y 的系数是 1 时,可以采用代入消元法。系数简单易替换,代入消元才简单。

例 1　(1) 解方程组$\begin{cases}x=2y & ①\\5x+6y=96 & ②\end{cases}$

分析　观察可知,方程①中 $x=2y$,$x=2y$ 代入方程②,替换掉方程②中的 x,于是就能得到一个一元一次方程,从而解出 y 的值。

把①代入②得:$5\times2y+6y=96$

$$10y+6y=96$$

$$16y=96$$

$$y=6$$

把 $y=6$ 代入①得 $x=12$。

所以,原方程组的解是$\begin{cases}x=12,\\y=6。\end{cases}$

(2) 解方程组$\begin{cases}x-y=3 & ①\\3x-5y=1 & ②\end{cases}$

分析　观察可知,方程①中 x 和 y 的系数都是 1,很容易得到 $x=y+3$,把 $x=y+3$ 代入方程②,替换掉方程②中的 x,于是就能得到一个一元一次方程,从而解出 y 的值。

由①得:$x=y+3$　③

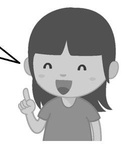
把③代入②得：$3(y+3)-5y=1$

$$3y+9-5y=1$$
$$9-2y=1$$
$$2y=9-1$$
$$2y=8$$
$$y=4$$

把 $y=4$ 代入①得 $x=7$。

所以，原方程组的解是$\begin{cases}x=7,\\y=4。\end{cases}$

用代入消元法解方程组的步骤是：变形、代替、求解、回代、写解。



(3) 解方程组$\begin{cases}x-2y=1 & ①\\3x+4y=23 & ②\end{cases}$

分析 观察可知，方程①中 x 的系数是1，很容易得到 $x=2y+1$，把 $x=2y+1$ 代入方程②，替换掉方程②中的 x，于是就能得到一个一元一次方程，从而解出 y 的值。

由①得：　$x=2y+1$　③（变形）

把③代入②得：$3(2y+1)+4y=23$　（代替）

$$6y+3+4y=23\quad（求解）$$
$$3+10y=23$$
$$10y=20$$
$$y=2$$

把 $y=2$ 代入①得 $x=5$。　（回代）

所以，原方程组的解是$\begin{cases}x=5,\\y=2。\end{cases}$　（写解）

例 2 解方程组$\begin{cases}x:y=1:4 & ①\\5x+6y=29 & ②\end{cases}$

分析 这个方程组中有比例，由方程①知，x 是1份，y 是4份。设每一份是 a，则 $x=a$；$y=4a$。然后把 $x=a$；$y=4a$ 代入方程②便可得到一个一元一次方程。

设 $x=a$；$y=4a$。

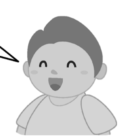
把 $x=a$；$y=4a$ 代入方程②得：$5a+6\times4a=29$

$$29a=29$$
$$a=1$$

所以，$x=a=1$，$y=4a=4$。

原方程组的解是$\begin{cases}x=1,\\y=4。\end{cases}$

x或y的系数为1，代入消元才简单。



秘籍2 加减消元

当方程组中同一个未知数的系数相同或相反时，把这两个方程的两边分别相减或相加，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程，这种方法叫作加减消元法。

例3 (1) 解方程组 $\begin{cases} x+3y=6 & ① \\ 2x-3y=3 & ② \end{cases}$

分析 观察可知，在方程组中 y 的系数相反，把两个方程相加，“$+3y$”与“$-3y$”相互抵消，从而得到一个一元一次方程。

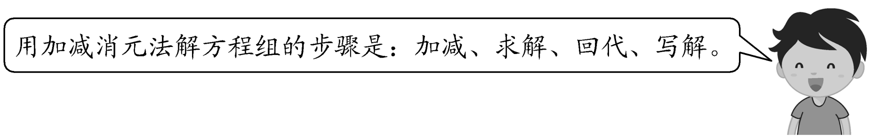
①+②得：$x+2x=6+3$

$3x=9$

$x=3$

把 $x=3$ 代入①得 $y=1$，

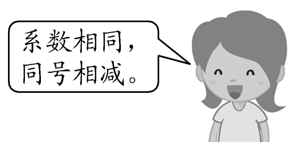
原方程组的解是 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$



(2) 解方程组 $\begin{cases} 4x+3y=7 & ① \\ 4x-2y=5\frac{1}{3} & ② \end{cases}$

分析 观察可知，在方程组中 x 的系数相同，把两个方程相减，“$4x$”减“$4x$”等于零，从而得到一个一元一次方程。

①−②得：$3y-(-2y)=7-5\frac{1}{3}$ （加减）



$3y+2y=\frac{5}{3}$ （求解）

$5y=\frac{5}{3}$

$y=\frac{1}{3}$

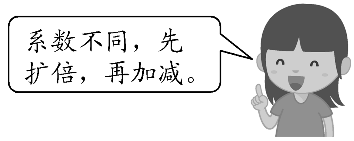
把 $y=\frac{1}{3}$ 代入①得到 $x=\frac{3}{2}$。 （回代）

原方程组的解是 $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$ （写解）

(3) 解方程组 $\begin{cases} 3x+2y=13 & ① \\ 5x-3y=9 & ② \end{cases}$

分析 这两个方程 x 和 y 的系数都不相同，可以先转化，根据等式的基本性质让 x

或 y 的系数相同。然后再“加减”消元。



①×3,②×2 得 $\begin{cases}9x+6y=39 & ③\\10x-6y=18 & ④\end{cases}$　（转化）

③+④得：$9x+10x=39+18$　（加减）

$19x=57$

$x=3$　（求解）

把 $x=3$ 代入①得 $y=2$。　（回代）

原方程组的解是 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$　（写解）

例 4　（1）解方程组 $\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=5 & ①\\[2mm]\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{12}=3\dfrac{1}{2} & ②\end{cases}$

分析　这两个方程都是分数系数方程，需要先转化为整数系数方程。

①×6,②×12 得：$\begin{cases}2x+y=30 & ③\\3x+y=42 & ④\end{cases}$

④−③得：$x=12$。

把 $x=12$ 代入①得 $y=6$。

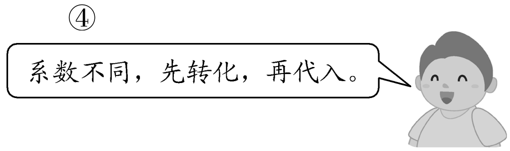
原方程组的解是 $\begin{cases}x=12\\y=6\end{cases}$

（2）解方程组 $\begin{cases}\dfrac{x+1}{y}=\dfrac{1}{2} & ①\\[2mm]\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{1}{3} & ②\end{cases}$

分析　这两个方程都是分数系数方程，并且分子和分母都含有未知数，利用“十字交叉相乘”或根据比例的基本性质“外项之积等于内项之积”把它们转化为整数系数方程。

十字交叉相乘得：$\begin{cases}(x+1)\times2=y\times1 & ③\\3x=(y+1)\times1 & ④\end{cases}$

整理得：$\begin{cases}2x+2=y & ⑤\\3x=y+1 & ⑥\end{cases}$



把⑤$y=2x+2$ 代入⑥得 $x=3$。

把得 $x=3$ 代入①得：　$y=8$。

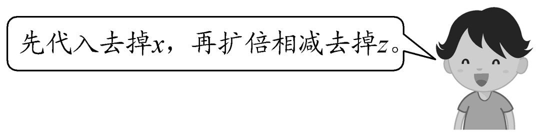
原方程组的解是 $\begin{cases}x=3\\y=8\end{cases}$

秘籍 3　解多元一次方程组

例 5　解方程组 $\begin{cases}x+y+z=12 & ①\\x+2y+5z=22 & ②\\x=4y & ③\end{cases}$

分析 这个方程组含有三个相同的未知数，每个方程未知数的最高次数都是 1，并且一共有 3 个方程，像这样的方程组叫作三元一次方程组。解三元一次方程组的基本思路是：通过“代入”或“加减”进行消元，把“三元”变为“二元”，使三元一次方程组转化为二元一次方程组，进而再转化为一元一次方程。

把③分别代入①和②，得到两个只含有 y 和 z 的方程组 $\begin{cases} 5y+z=12 & ④ \\ 6y+5z=22 & ⑤ \end{cases}$



把④ ×5 得：$25y+5z=60$　　⑥

⑥ - ⑤得：　$19y=38$

$y=2$

把 $y=2$ 代入④得 $z=2$；

把 $y=2$，$z=2$ 代入①得 $x=8$。

原方程组的解是 $\begin{cases} x=8 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$

例 6 解方程组 $\begin{cases} 3x-y+z=4 & ① \\ 2x+3y-z=12 & ② \\ x+y+z=6 & ③ \end{cases}$

分析 观察得知，方程②的“$-z$”与方程①和③的“$+z$”都正好相反，所以① + ②，② + ③不仅可以消去未知数 z，还能得到一个二元一次方程组。

以① + ②，② + ③得 $\begin{cases} 5x+2y=16 & ④ \\ 3x+4y=18 & ⑤ \end{cases}$

把④ ×2 得：$10x+4y=32$　　⑥

⑥ - ⑤得：　$7x=14$

$x=2$

把 $x=2$ 代入④得 $y=3$，

把 $x=2$，$y=3$ 代入③得 $z=1$。

原方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

秘籍总结

方程组，需消元，不是“代入”，就是“加减”。

系数简单易替换，代入消元很简单。一替一消成一元，化繁为简巧计算。

系数相反用加法，系数相同才相减。系数不同先转化，相同相反再减加。

秘籍修炼

练 1 解方程 $\begin{cases} x=2y-1 \\ 2x+y=10 \end{cases}$

练 2 解方程$\begin{cases}x+2y=9\\2x-3y=11\end{cases}$

练 3 解方程$\begin{cases}3x+5y=19\\8x-3y=18\end{cases}$

练 4 解方程$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=2\dfrac{1}{2}\\\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{6}=2\dfrac{2}{3}\end{cases}$

练 5 解方程$\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y}{3}=6\\\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{41}{6}\end{cases}$

练 6 解方程$\begin{cases}x+y+z=35\\2x-y=5\\\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}\end{cases}$

第12讲　定义新运算

秘籍导航

加、减、乘、除是同学们学过的四则运算，这四种运算的意义和法则相信同学们是熟悉的，但是随着社会的发展，尤其是计算机技术的广泛应用，常常需要设定一些特定的运算规则和程序，这是人为规定的运算，是临时性的运算形式，我们称之为“定义新运算”。

定义新运算使用特殊符号（如◇、*、※、☆、◎、△等）来表示某种特定的运算规则和程序，解答定义新运算的题目，关键是要正确地理解新定义符号的含义，按照新定义的规则和程序将数值代入，把新运算转化为我们熟悉的四则运算形式，然后再按照常规的运算法则计算。

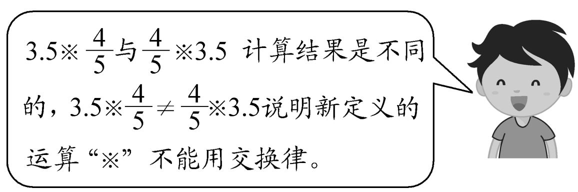
秘籍攻略

秘籍 1　照猫画猫

例 1　（1）“※”表示一种新的运算，它是这样定义的：$a※b=a\times b+b$，求 $3.5※\frac{4}{5}$ 和 $\frac{4}{5}※3.5$ 的值。

分析　按照题目定义的运算规则，需要把“※”前后两个数相乘，再加上“※”后面的数。按照这个规则先把新运算转化为常规的四则运算，然后再计算。

$$3.5※\frac{4}{5}=3.5\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}$$
$$=\frac{14}{5}+\frac{4}{5}$$
$$=3\frac{3}{5}$$



$$\frac{4}{5}※3.5=\frac{4}{5}\times3.5+3.5$$
$$=2.8+3.5$$
$$=6.3$$

（2）规定 $a\triangle b=(a+b)\div b$，求 $\frac{5}{6}\triangle\frac{7}{12}$

分析　按照题目定义的运算规则，需要把“△”前后两个数相加，再除以“△”后面的数。按照这个规则先把新运算转化为常规的四则运算，然后再计算。

$$\frac{5}{6}\triangle\frac{7}{12}=\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{12}\right)\div\frac{7}{12}$$
$$=\frac{17}{12}\div\frac{7}{12}$$
$$=\frac{17}{7}$$

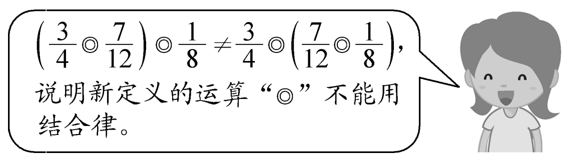
例 2 (1) A、B 表示两个数，定义 $A◎B=(A+B)\div 2$，

求① $\left(\frac{3}{4}◎\frac{7}{12}\right)◎\frac{1}{8}$　② $\frac{3}{4}◎\left(\frac{7}{12}◎\frac{1}{8}\right)$

分析 在新定义的算式中如果有括号要先算括号里面的。按照这道题定义的规则，需要把"◎"前后两个数先相加求和再除以 2。

$$①原式=\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{12}\right)\div 2\right]◎\frac{1}{8}$$
$$=\frac{2}{3}◎\frac{1}{8}$$
$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{8}\right)\div 2$$
$$=\frac{19}{48}$$

$$②原式=\frac{3}{4}◎\left[\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{8}\right)\div 2\right]$$
$$=\frac{3}{4}◎\frac{17}{48}$$
$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{17}{48}\right)\div 2$$
$$=\frac{53}{96}$$



(2) 如果规定 $⊗2=1\times 2\times 3$，$⊗3=2\times 3\times 4$，$⊗4=3\times 4\times 5$，……

计算 $\left(\frac{1}{⊗2}-\frac{1}{⊗3}\right)\times\frac{⊗2}{⊗3}$。

分析 这道题定义的规则是 $⊗A=(A-1)\times A\times(A+1)$。直接按照新定义的规则把数代入算式，把新定义的算式转化为我们熟知的算式，然后计算即可。

$$原式=\left(\frac{1}{1\times 2\times 3}-\frac{1}{2\times 3\times 4}\right)\times\frac{1\times 2\times 3}{2\times 3\times 4}$$
$$=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{32}$$

秘籍 2　照猫画虎

例 3 (1) 如果 $\frac{1}{2}※3=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$，$\frac{1}{7}※4=\frac{1}{7}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{9}\times\frac{4}{10}$，那么 $\frac{1}{2}※4+\frac{1}{3}※3$ 等于几？

分析 由已知的两个新定义算式得知：①"※"表示几个分数连乘，且后一个分数的分子和分母都比前一个分数的分子和分母多 1。②"※"号前面的数表示第一个因数，※"号后面的数表示因数的个数。

$$原式=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}$$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$

$=\frac{3}{10}$

(2) 如果 $2\otimes1=\frac{1}{2}$, $3\otimes2=\frac{1}{33}$, $4\otimes3=\frac{1}{444}$, 那么, $\frac{6\otimes3}{2\otimes6}$ 的值是多少?

分析 由已知的 3 个新定义算式得知:“$\otimes$”表示的是一个分数,这个分数的分子是 1,分母是由“$\otimes$”前面的数组成的自然数,“$\otimes$”后面的数表示分母的位数。

$$原式=\frac{\frac{1}{666}}{\frac{1}{222222}}=\frac{\frac{1}{666}\times666666}{\frac{1}{222222}\times666666}=\frac{1001}{3}=333\frac{2}{3}$$

例 4 (1) 如果 $\frac{1}{2}◎4=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$, $\frac{1}{2}◎5=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$, 求 $\frac{1}{2}◎10$。

分析 由已知的 2 个新定义算式得知:“◎”表示几个分数连加,且每一个加数都可以写成分数裂项的形式。◎”号前面的数表示第一个加数,◎”号后面的数表示加数的个数。

$$原式=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots+\frac{1}{110}$$

$=1-\frac{1}{11}$

$=\frac{10}{11}$

(2) 规定: $1\oplus=1$

$2\oplus=1\times\frac{1}{2}$

$3\oplus=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

$4\oplus=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$

①求 $(10\oplus)\div(8\oplus)$ ②已知 $x\oplus=\frac{1}{720}$, 求 x 的值。

分析 由已知的 4 个新定义算式得知:“$\oplus$”表示从 $\frac{1}{1}$ 开始的若干个连续的单位分数的乘积,“$\oplus$”前面的数表示单位分数的个数,也是最后一个单位分数的分母。

$$①原式=\left(1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{10}\right)\div\left(1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{8}\right)$$

$=\frac{1}{9}\times\frac{1}{10}$

$=\frac{1}{90}$

② $x \oplus = \frac{1}{720}$

$x \oplus = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$

$x \oplus = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6}$

$x = 6$

秘籍 3　方程与定义新运算的综合

例 5 规定 $a☆b$ 表示 a 的 4 倍减去 b 的 3 倍，即 $a☆b = 4a - 3b$。已知 $x☆\left(\frac{5}{8}☆\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{20}$，求 x 的值。

分析 新运算的规则题目已经做了说明，只需要按照规则把题目转化为一般的方程就行了，不过计算时应该先算括号里面的部分。

$$x☆\left(4 \times \frac{5}{8} - 3 \times \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{20},$$

$$x☆\frac{7}{4} = \frac{7}{20}$$

$$4x - 3 \times \frac{7}{4} = \frac{7}{20}$$

$$x = \frac{7}{5}$$

例 6 (1) "@"表示一种运算，它的含义是：$a@b = \frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+1)(b+x)}$，如果 $3@2 = \frac{1}{4}$，那么 x 是多少？

分析 新运算的规则题目已经做了说明，只需要按照规则把题目转化为一般的方程即可，不过计算时应该先算括号里面的部分。

$$\frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{(3+1) \times (2+x)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4 \times (2+x)} = \frac{1}{12}$$

$$2 + x = 3$$

$$x = 1$$

(2) 用 $\{a\}$ 表示 a 的小数部分，$[a]$ 表示不超过 a 的最大整数。例如，$\{0.3\} = 0.3$，$\left[4\frac{1}{4}\right] = 4$。记 $F(x) = \frac{x+2}{2x+1}$，计算 $\left\{F\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$ 和 $\left[F\left(\frac{1}{4}\right)\right]$ 的值。

分析 先按新定义的规则算出 $F\left(\frac{1}{3}\right)$ 和 $F\left(\frac{1}{4}\right)$ 的值，然后再按要求取整数部分或小数部分。

$$\left\{F\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = \left\{\frac{\frac{1}{3}+2}{2 \times \frac{1}{3} + 1}\right\} = \left\{\frac{7}{5}\right\} = \frac{2}{5}$$

$$\left[F\left(\frac{1}{4}\right)\right]=\left[\frac{\frac{1}{4}+2}{2\times\frac{1}{4}+1}\right]=\left[\frac{3}{2}\right]=1$$

秘籍总结

解答定义新运算,正确理解新定义的规则是关键。按照新规则,代入数值,把新定义的算式转化为常规的加、减、乘、除再计算。

常规的运算定律和性质,在新定义的算式中未加证明之前千万不能出现。

秘籍修炼

练 1 "△"表示一种新的运算,它是这样定义的:$x\triangle y=(x+y)-(x-y)$。

求:(1)$\frac{16}{17}\triangle\frac{3}{11}$　(2)$\frac{11}{12}\triangle\frac{4}{5}$

练 2 如果 $A☆B=\frac{B-A}{A+B}$,那么$\frac{4}{5}☆\frac{7}{8}$的值是多少?

练 3 设 P、Q 表示两个数,且 $P◆Q=\frac{P\times Q}{2}$,求$\frac{1}{2}◆\left(\frac{2}{3}◆\frac{3}{4}\right)$

练 4 如果$\frac{1}{3}◎3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$,$\frac{1}{2}◎5=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}$,$\frac{1}{5}◎2=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}$,

求:(1)$\frac{1}{2}◎4+\frac{1}{3}◎3$　(2)$\frac{1}{3}◎3-\frac{1}{4}◎3$

练 5 规定 $m※n=3m+2n$,若 $4\frac{2}{3}※\left(x※\frac{3}{4}\right)=21$,求 x 的值是多少?

练 6 定义新运算"▽",$x▽y=\frac{6xy}{mx+2y}$,其中 m 是一个确定的整数,已知$\frac{1}{4}▽\frac{2}{3}=\frac{6}{11}$,求$\frac{3}{5}▽\frac{5}{8}$的值是多少?

第13讲　用放缩法估值

秘籍导航

放缩法:要证明不等式 $A<B$ 成立,有时可以将它的一边放大或缩小,寻找一个中间量,如将 A 放大成 C,即 $A<C$,后证 $C<B$,这种证法便称为放缩法。

放缩法是一种有意识的对相关的数或者式子的取值进行放大或缩小的方法。

掌握用放缩法确定题目的整数部分。

秘籍攻略

秘籍 1　整体放缩

例 1　(1) 计算 $8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22$ 的整数部分。

分析　观察上题是三对小数相加,且比较相近。当两个数的和不变时,两数越接近(即差越小)它们的积越大。

所以　$8.03\times1.22<8.02\times1.23<8.01\times1.24$

令　$8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22=A$

$A<8.01\times1.24\times3<8\times1.25\times3=30$

$A>8\times(1.24+1.23+1.22)=8\times3.69=29.52$

所以,原式的整数部分是 29。

(2) 计算 $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}$ 的整数部分。

分析　观察上题是分子相同,且分母相邻,个数较少,这样可以用整体放缩。

令　$A=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}$

$A>\frac{1}{15}\times6=\frac{2}{5}$

$A<\frac{1}{10}\times6=\frac{3}{5}$

所以,原式的整数部分是 0。

例 2　(1) 计算 $\dfrac{1}{\frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2011}}$ 的整数部分。

分析　观察上题是繁分数,分母是较相近的五个分数相加,个数较少,所以可以整体放缩

令分母 $=A$,先缩小 $A>\frac{1}{2015}\times5=\frac{1}{403}$,

再放大，$A<\frac{1}{2011}\times5=\frac{5}{2011}$，

则原式 $=\frac{1}{A}$

$$\frac{2011}{5}<\frac{1}{A}<\frac{2015}{5}$$

$$402.2<\frac{1}{A}<403$$

所以原式的整数部分是 402。

（2）计算 $1\frac{10}{100}+2\frac{10}{101}+3\frac{10}{102}+\cdots+11\frac{10}{110}$ 的整数部分。

分析 观察上题是带分数的形式，所以我们应该把整数方面单算，主要是处理分数部分。分数部分分子相同，而分母是相邻的 11 个自然数，所以可以用整体放缩法。

原式 $=(1+2+3+\cdots+11)+\left(\frac{10}{100}+\frac{10}{101}+\frac{10}{102}+\cdots+\frac{10}{110}\right)$

$=66+\left(\frac{10}{100}+\frac{10}{101}+\frac{10}{102}+\cdots+\frac{10}{110}\right)$

令原式 $=A$

$A>66+\frac{10}{110}\times11=67$

$A<66+\frac{10}{100}\times11=67.1$

所以原式的整数部分是 67。

（3）计算 $\frac{10}{11}+\frac{11}{12}+\frac{12}{13}+\cdots+\frac{18}{19}+\frac{19}{20}$ 的整数部分。

分析 观察上题是 $\frac{10}{11},\frac{11}{12},\frac{12}{13},\frac{18}{19},\frac{19}{20}$ 接近 1 的真分数。所以先将这些真分数变成分子相同的分数，所以可以用整体放缩法。

原式 $=\left(1-\frac{1}{11}\right)+\left(1-\frac{1}{12}\right)+\left(1-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{19}\right)+\left(1-\frac{1}{20}\right)$

$=10-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$

令原式 $=A$，

$A>10-\frac{1}{11}\times10=9\frac{1}{11}$

$A<10-\frac{1}{20}\times10=9\frac{1}{2}$

所以原式的整数部分是 9。

秘籍 2 分段放缩

例 3 （1）计算 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{15}$ 的整数部分

分析 观察上题有十五个数，如果用整体放缩，得出的结果是介于 1 到 15 之间，这个范围太大，说明放缩的程度过大。所以我们可以先分组，然后再进行局部放缩。

先分组，组内进行放缩先把结果放大。

$$原式=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)$$

$$<1+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{4}\times4+\frac{1}{8}\times8=4$$

再把结果缩小。

$$原式=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{8}\times4+\frac{1}{16}\times8$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times4+\frac{1}{16}\times8$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$$

所以原式的整数部分是 3。

（2）计算 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$的整数部分。

分析 观察上题有十六个数，是比上面的题多一个$\frac{1}{16}$，与(1)的方法一样可以先分组，然后再进行局部放缩。

先分组，组内进行放缩先把结果放大，

$$原式=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)$$

$$<1+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{4}\times4+\frac{1}{8}\times8=4$$

再把结果缩小。

$$原式=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\times4+\frac{1}{16}\times8$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$$

所以原式的整数部分是 3。

例 4 计算$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{43}+\frac{1}{44}$的整数部分。

分析 观察上题数比较多,根据题(1)整体放缩肯定不行,所以我们可以先分组,再进行局部放缩。

先分组,组内进行放缩先把结果放大,

$$\text{原式}=\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}\right)+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{33}+\cdots+\frac{1}{43}+\frac{1}{44}\right)$$

$$<\frac{1}{11}\times5+\frac{1}{16}\times16+\frac{1}{32}\times13$$

$$<\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2$$

再进行缩小分组。

$$\text{原式}=\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}+\frac{1}{32}\right)+\left(\frac{1}{33}+\frac{1}{34}+\cdots+\frac{1}{43}+\frac{1}{44}\right)$$

$$>\frac{1}{16}\times6+\frac{1}{32}\times16+\frac{1}{44}\times12$$

$$>1$$

所以原式的整数部分是 1。

秘籍 3 头尾放缩

例 5 (1) 计算$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{42}$的整数部分。

分析 观察上题数较多,所以一定可以用分组放缩,但还可以用头尾合并放缩。

$$\text{原式}=\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{42}\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{41}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{28}\right)+\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{27}\right)$$

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{42}=\frac{11+42}{11\times42}=\frac{53}{11\times42}$$

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{41}=\frac{12+41}{12\times41}=\frac{53}{12\times41}$$

$\cdots$

$$\frac{1}{26}+\frac{1}{27}=\frac{26+27}{26\times27}=\frac{53}{26\times27}$$

两数和一定,差越小积越大,则有 $11\times42<12\times41<\cdots<26\times27$

分子相同,分母越小则分数越大,

那么$\frac{1}{11}+\frac{1}{42}>\frac{1}{12}+\frac{1}{41}>\cdots>\frac{1}{25}+\frac{1}{28}>\frac{1}{26}+\frac{1}{27}$

所以$\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{27}\right)\times16<\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{42}<\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{42}\right)\times16$

所以 $1<\frac{848}{702}<\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{42}<\frac{848}{462}<2$

所以原式的整数部分是 1。

（2）计算 $\left(\frac{10}{11}+\frac{11}{12}+\frac{12}{13}+\frac{13}{14}+\frac{14}{15}+\frac{15}{16}+\frac{16}{17}+\frac{17}{18}+\frac{18}{19}+\frac{19}{20}\right)\times 5$ 的整数部分

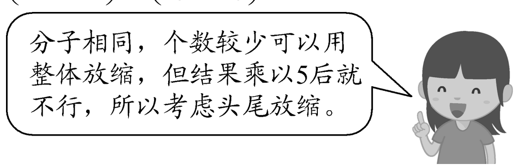
分析 观察上题分子不一样、数较多、题目综合例 2（3），所以先把分子转化成相同的，然后再将分数部分进行头尾合并放缩。

$$\text{原式}=\left(\frac{10}{11}+\frac{11}{12}+\frac{12}{13}+\frac{13}{14}+\frac{14}{15}+\frac{15}{16}+\frac{16}{17}+\frac{17}{18}+\frac{18}{19}+\frac{19}{20}\right)\times 5$$
$$=\left[10-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}\right)\right]\times 5$$
$$=50-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}\right)\times 5$$

对后面分数部分进行头尾放缩，

$$\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)$$

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{20}=\frac{11+20}{11\times 20}=\frac{31}{11\times 20}$$



$$\frac{1}{12}+\frac{1}{19}=\frac{12+19}{12\times 19}=\frac{31}{12\times 19}$$
$$\frac{1}{13}+\frac{1}{18}=\frac{13+18}{13\times 18}=\frac{31}{13\times 18}$$

…

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{16}=\frac{15+16}{15\times 16}=\frac{31}{15\times 16}$$

两数和一定，差越小积越大，则有 $11\times 20<12\times 19<13\times 18<\cdots<15\times 16$

分子相同，分母越小则分数越大。

那么 $\frac{1}{11}+\frac{1}{20}>\frac{1}{12}+\frac{1}{19}>\frac{1}{13}+\frac{1}{18}>\frac{1}{14}+\frac{1}{17}>\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$

先进行放大，

$$\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}\right)\times 5<\frac{31}{11\times 20}\times 25=3\frac{23}{44}<4,$$

再进行缩小，

$$\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}\right)\times 5>\frac{31}{15\times 16}\times 25=3\frac{11}{48}>3,$$

因此 $50-\left(\frac{10}{11}+\frac{11}{12}+\frac{12}{13}+\frac{13}{14}+\frac{14}{15}+\frac{15}{16}+\frac{16}{17}+\frac{17}{18}+\frac{18}{19}+\frac{19}{20}\right)\times 5>50-4=46$。

$50-\left(\frac{10}{11}+\frac{11}{12}+\frac{12}{13}+\frac{13}{14}+\frac{14}{15}+\frac{15}{16}+\frac{16}{17}+\frac{17}{18}+\frac{18}{19}+\frac{19}{20}\right)\times 5<50-3=47$。

所以原式的整数部分是 46。

例 6 （1）计算 $\frac{100}{101+102+103}+\frac{101}{100+102+103}+\frac{102}{100+101+103}+\frac{103}{100+101+102}$ 的整数部分。

分析 设 $s=\frac{100}{101+102+103}+\frac{101}{100+102+103}+\frac{102}{100+101+103}+\frac{103}{100+101+102}$

$s>\frac{100}{100+101+102+103}+\frac{101}{100+101+102+103}+\frac{102}{100+101+102+103}+\frac{103}{100+101+102+103}=1$

因为 $\frac{100}{101+102+103}+\frac{101}{100+102+103}+\frac{102}{100+101+103}<\frac{100}{101+102+100}+\frac{101}{100+102+101}+\frac{102}{100+101+102}=1$

所以 $s<1+\frac{103}{100+101+102}<2$

因此 s 的整数部分是 1。

(2) 计算 $\frac{621^2}{739^2+358^2+947^2}+\frac{739^2}{621^2+358^2+947^2}+\frac{358^2}{621^2+739^2+947^2}+\frac{947^2}{621^2+358^2+739^2}$的整数部分。

分析 令 $a=621^2,b=739^2,c=358^2,d=947^2$。由于每个分数都小于 1，有 $\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{a+b+c}<\frac{d+d}{a+b+c+d}$，$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{a+b+d}<\frac{c+c}{a+b+c+d}$，$\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{a+d+c}<\frac{b+b}{a+b+c+d}$，$\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{d+b+c}<\frac{a+a}{a+b+c+d}$，所以原式大于 1 小于 2，整数部分是 1。

秘籍总结

求整数部分，个数较少用整体放缩。
求整数部分，个数较多且首尾接近用头尾放缩。
求整数部分，个数较多且首尾差距较大用分组放缩。

秘籍修炼

练 1 (1)计算 $6.01\times1.24+6.02\times1.23+6.03\times1.22$ 的整数部分。

(2)计算$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{19}$的整数部分。

练 2　计算$\dfrac{1}{\dfrac{1}{3015}+\dfrac{1}{3014}+\dfrac{1}{3013}+\dfrac{1}{3012}+\dfrac{1}{3011}}$的整数部分。

练 3　计算$1\dfrac{20}{100}+2\dfrac{20}{101}+3\dfrac{20}{102}+\cdots+11\dfrac{20}{110}$的整数部分。

练 4　计算$\dfrac{20}{21}+\dfrac{21}{22}+\dfrac{22}{23}+\cdots+\dfrac{28}{29}+\dfrac{29}{30}$的整数部分。

练 5　计算$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{16}$的整数部分。

练 6　计算$\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{19}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{22}+\dfrac{1}{23}+\cdots+\dfrac{1}{53}+\dfrac{1}{54}+\dfrac{1}{55}$的整数部分。

第14讲　综合训练（1）

秘籍导航

在做分小混合运算时学会数的拆分达到凑整的目的，会使运算简便。综合复习分数运算相关技巧。

秘籍攻略

秘籍1　拆分与凑整的综合运用

例1　（1）计算 $201\times\frac{17}{25}$

分析　观察算式发现201接近于200，200正好是分母25的倍数，先算 $200\times\frac{17}{25}$，再算 $1\times\frac{17}{25}$，这样就使复杂的计算简单化了。

$$\begin{aligned}原式&=(200+1)\times\frac{17}{25}\\&=200\times\frac{17}{25}+1\times\frac{17}{25}\\&=136+\frac{17}{25}\\&=136\frac{17}{25}\end{aligned}$$

（2）计算 $\frac{18}{37}\times39$

分析　观察算式发现39接近于37，37正好是分母37的倍数。

$$\begin{aligned}原式&=\frac{18}{37}\times(37+2)\\&=\frac{18}{37}\times37+\frac{18}{37}\times2\\&=18+\frac{36}{37}\\&=18\frac{36}{37}\end{aligned}$$

（3）计算 $\frac{0.5\times236\times59}{118}$

分析　方法一：236是分母118的倍数，先计算 $236\div118$，可使计算简便。

$$原式=\frac{0.5\times\overset{2}{\cancel{236}}\times59}{\underset{1}{\cancel{118}}}=59$$

方法二：59 和 118 有倍数关系，先计算 $59\div118$ 达到计算简便的目的。

原式$=\dfrac{0.5\times236\times\overset{1}{\cancel{59}}}{\underset{2}{\cancel{118}}}=59$

方法三：0.5×236 的积是 118 的倍数。

原式 $=\dfrac{\overset{1}{\cancel{0.5\times236}}\times59}{\underset{1}{\cancel{118}}}=59$

例 2　（1）计算 $9\dfrac{8}{9}+99\dfrac{88}{99}+999\dfrac{888}{999}+9999\dfrac{8888}{9999}$

分析　每个加数都接近整十整百的数，把它们分别折分成整十、整百的数减去一个相同分数的形式，使计算简便。

$$\begin{aligned}原式&=\left(10-\frac{1}{9}\right)+\left(100-\frac{11}{99}\right)+\left(1000-\frac{111}{999}\right)+\left(10000-\frac{1111}{9999}\right)\\&=11110-\left(\frac{1}{9}+\frac{11}{99}+\frac{111}{999}+\frac{1111}{9999}\right)\\&=11110-\frac{4}{9}\\&=11109\frac{5}{9}\end{aligned}$$

（2）计算 $9\dfrac{7}{8}+99\dfrac{77}{88}+999\dfrac{777}{888}+9999\dfrac{7777}{8888}+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{2024个“9”}\dfrac{\overbrace{77\cdots7}^{2024个“7”}}{\underbrace{888\cdots8}_{2024个“8”}}$

分析　每个加数都接近于整十、整百的数，把每个加数转化成整十、百的数与一个分数相减的形式计算简便。

$$\begin{aligned}原式&=\left(10-\frac{1}{8}\right)+\left(100-\frac{11}{88}\right)+\left(1000-\frac{111}{888}\right)+\cdots+\left(1\underbrace{00\cdots0}_{2024个“0”}-\frac{\overbrace{11\cdots1}^{2024个“1”}}{\underbrace{88\cdots8}_{2024个“8”}}\right)\\&=\underbrace{11\cdots1}_{2024个“1”}0-2024\times\frac{1}{8}\\&=\underbrace{11\cdots1}_{2021个“1”}0857\end{aligned}$$

例 3　（1）计算 $12.5\times3\dfrac{1}{5}\times25$

分析　把 $3\dfrac{1}{5}$ 拆成 4×0.8 的形式，12.5×0.8 的积与 25×4 的积都可以凑成整十整百数。

$$\begin{aligned}原式&=12.5\times(4\times0.8)\times25\\&=(12.5\times0.8)\times(4\times25)\\&=10\times100\\&=1000\end{aligned}$$

（2）计算 $0.25\times12.5\times62.5\times51.2$

分析　把 51.2 拆成 $4\times8\times1.6$ 的形式，0.25×4、12.5×8、62.5×1.6 的积都是整

十整百数。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=0.25\times12.5\times62.5\times(4\times8\times1.6)\\&=(0.25\times4)\times(12.5\times8)\times(62.5\times1.6)\\&=1\times100\times100\\&=10000\end{aligned}$$

(3) 计算$\frac{5}{6}\times0.71+\frac{5}{6}\times0.29$

分析 0.71 +0.29 的和正好是整数,运算符号也符合乘法分配律,使运算简便

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{5}{6}\times(0.71+0.29)\\&=\frac{5}{6}\times1\\&=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

(4) 计算 $41.2\times8.1+11\times9\frac{1}{4}+0.19\times537$

分析 凑成相同的数,多次应用乘法分配律与运算简便。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=41.2\times8.1+1.9\times53.7+11\times9.25\\&=41.2\times8.1+1.9\times41.2+1.9\times12.5+11\times9.25\\&=41.2\times(8.1+1.9)+(11+8)\times1.25+11\times9.25\\&=41.2\times10+(1.25+9.25)\times11+8\times1.25\\&=412+10.5\times11+10\\&=412+115.5+10\\&=537.5\end{aligned}$$

(5) 计算$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\div\frac{1}{30}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\div\frac{1}{105}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)\div\frac{1}{315}$

分析 每个括号内分母之积正好是括号外的分母,应用乘法分配律使计算简便。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times30+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\times105+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)\times315\\&=15+10+6+35+21+15+63+45+35\\&=(15+35+15+35)+(10+6+21+63)+45\\&=100+100+45\\&=245\end{aligned}$$

(6) 计算$\left(\frac{1}{34}-\frac{1}{51}\right)\div\left(\frac{1}{51}-\frac{1}{68}\right)+\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{33}\right)\div\left(\frac{1}{33}-\frac{1}{44}\right)$

分析 运用乘法分配律使复杂的计算简单化。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left[\frac{1}{17}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]\div\left[\frac{1}{17}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]+\left[\frac{1}{11}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]\div\\&\quad\left[\frac{1}{11}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

$=2\times\left(\frac{1}{6}\div\frac{1}{12}\right)$

$=4$

秘籍2　换元法综合运用

例4　（1）计算$(7.88+6.77+5.66)\times(9.31+10.98+10)-(7.88+6.77+5.66+10)\times(9.31+10.98)$

分析　将一个式子看成一个整体，进行“打包”整理。

令$7.88+6.77+5.66=a$，$9.31+10.98=b$

原式$=a\times(b+10)-(a+10)\times b$

$=10a+ab-ab-10b$

$=10(a-b)$

$=10\times(7.88+6.77+5.66-9.31-10.98)$

$=10\times0.02$

$=0.2$

（2）计算$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$

分析　把某个式子看成一个整体，用另一个量去代替它，从而使问题得到简化，使复杂的计算简化。

令$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=a$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=b$

原式$=\left(a-\frac{1}{6}\right)\times b-a\times\left(b-\frac{1}{6}\right)$

$=ab-\frac{1}{6}b-ab+\frac{1}{6}a$

$=\frac{1}{6}(a-b)$

$=\frac{1}{6}\times1$

$=\frac{1}{6}$

秘籍3　裂项的综合运用

例5　（1）计算$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{9\times10}$

分析　如果把分数加法中的一些分数适当拆开，使得拆开后的一些分数在运算过程中可以相互抵消，则可使运算简便

原式$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$

$=1-\frac{1}{10}$

$=\frac{9}{10}$

(2) 计算 $1-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}+\frac{15}{56}-\frac{17}{72}+\frac{19}{90}$

分析 每个分数分母是两个连续自然数的积，分子是它们的和，因而可以通过裂项相互抵消。

$$原式=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

$$=\frac{3}{5}$$

(3) 计算 $\frac{2}{1\times(1+2)}+\frac{3}{(1+2)\times(1+2+3)}+\frac{4}{(1+2+3)\times(1+2+3+4)}+\cdots+\frac{100}{(1+2+\cdots+99)\times(1+2+3+\cdots+100)}$

分析 观察分母，可转化两个连续自然数的积，分子是它们的差，因而可以通过裂项相互抵消。

$$原式=\frac{2}{1\times3}+\frac{3}{3\times6}+\frac{4}{6\times10}+\cdots+\frac{100}{4950\times5050}$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{4950}-\frac{1}{5050}$$

$$=\frac{5049}{5050}$$

秘籍 4 综合应用知识进行拆分与凑整

例 6 (1) 计算 $\dfrac{\frac{8+9+10}{7}-\frac{9+10+11}{8}+\frac{10+11+12}{9}-\frac{11+12+13}{10}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}$

分析 把繁分数中的分子每部分还原成整数加真分数的形式进行整理，再与分母约分，可使复杂的计算简化。

$$原式=\frac{\left(\frac{8}{7}+\frac{9}{7}+\frac{10}{7}\right)-\left(\frac{9}{8}+\frac{10}{8}+\frac{11}{8}\right)+\left(\frac{10}{9}+\frac{11}{9}+\frac{12}{9}\right)-\left(\frac{11}{10}+\frac{12}{10}+\frac{13}{10}\right)}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}\right)-\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}\right)}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{\frac{6}{7}-\frac{6}{8}+\frac{6}{9}-\frac{6}{10}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{6\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}$$

$=6$

（2）计算$\frac{235^2+702^2+235\times1404}{937}-\frac{567^2+117^2-234\times567}{450}$

分析 繁分数的计算不害怕,认真观察规律运用公式化繁为简解决它。

根据公式 $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$,

原式 $=\frac{(235+702)^2}{937}-\frac{(567-117)^2}{450}$

$=\frac{937^2}{937}-\frac{450^2}{450}$

$=937-450$

$=487$

秘籍修炼

练 1 计算 $41\times\frac{27}{40}$

练 2 计算 $9\frac{1}{2}+99\frac{1}{2}+999\frac{1}{2}+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{10个“9”}\frac{1}{2}$

练 3 计算 $2.5\times3.2\times12.5$

练 4 计算$(10+87.6+31.2)\times(87.6+31.2+91.8)-(10+87.6+31.2+91.8)\times(87.6+31.2)$

练 5 计算$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{49\times52}$

练 6 计算$\frac{3}{1^2\times2^2}+\frac{5}{2^2\times3^2}+\frac{7}{3^2\times4^2}+\cdots+\frac{15}{7^2\times8^2}$

第15讲　综合训练（2）

秘籍导航

综合复习第 8 讲到第 13 讲内容,重点掌握通项归纳和方程的相关技巧。

秘籍攻略

秘籍 1　定义新运算综合

例 1　(1) 定义运算 $a \oplus b = ab + b$ 求 $[(1\oplus 2)\oplus 3]\oplus 4$ 的值

分析　原式 $=(4\oplus 3)\oplus 4 = 15\oplus 4 = 64$

(2) 定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$,解方程 $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 97$

分析　原方程可化为 $3(2x-1)-2x=97$,即 $x=25$。

秘籍 2　比与比例相关计算

例 2　(1) 将连比化成最简整数比 $\frac{1}{24}:\frac{1}{36}:\frac{1}{12}$

分析　利用比的性质:比的各项乘以或者除以一个相同的数(0 除外),比的大小不变。要想化成最简整数比,需要将比的各项乘以一个数把分母都约掉,不难想到可以同时乘以 72,则原来的比化为 3∶2∶6

(2) 已知甲∶乙 = 1∶2,乙∶丙 = 3∶5,丙∶丁 = 4∶3,求甲∶乙∶丙∶丁是多少?

分析　先化甲∶乙∶丙,乙应该变成 2 和 3 的最小公倍数 6,则根据比的性质,甲∶乙∶丙 = 3∶6∶10,然后再把丁化入这个连比,此时丙应当变成 10 和 4 的最小公倍数 20,则甲∶乙∶丙∶丁 = 6∶12∶20∶15。

秘籍 3　解方程组综合

例 3　(1) 解方程组

$$\begin{cases} 3x+2y+z=10 \\ x+3y+2z=13 \\ 2x+y+3z=13 \end{cases}$$

分析　由轮换式想到可以把三个式子相加,相加得 $x+y+z=6$,方程组中原来的三个式子分别减这个式子可得 $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 2y+z=7 \\ x+2z=7 \end{cases}$,进一步用代入消元或者加减消元可

得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3。\end{cases}$

本题当然可以用代入或加减消元法解,但对于轮换式,想到3个式子相加,是很好思路,如果求 $x+y+z$ 是多少,三个式子相加是经典解法。

（2）解方程组$\begin{cases}\frac{1}{2}(x+4y)-\frac{1}{3}y=30\\(x+2y):(4x-y)=8:5\end{cases}$

分析　首先第一个式子等号两边同时乘6得 $3x+10y=180$,第二个式子利用比例的性质得 $8(4x-y)=5(x+2y)$,即 $3x-2y=0$,所以原方程组化为$\begin{cases}3x+10y=180,\\3x-2y=0。\end{cases}$最后运用加减消元得原方程组的解$\begin{cases}x=10,\\y=15。\end{cases}$

秘籍4　通项归纳型计算题

例4　（1）计算 $1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+48\times50$

分析　设算式的第 n 项为 a_n,不难发现 $a_n=n(n+2)=n^2+2n$。

原式 $=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{48}=(1^2+2^2+\cdots+48^2)+2\times(1+2+\cdots+48)=\frac{48\times49\times(2\times48+1)}{6}+2\times\frac{49\times48}{2}=40376$。

（2）计算 $1\times2^2+2\times3^2+\cdots+19\times20^2$

分析　设第 n 项为 a_n,若在算式第一项前面增加一项 0×1^2 并不会影响算式的计算结果,但通项公式会变得比较简单,为:$a_n=(n-1)n^2=n^3-n^2$。(否则 $a_n=n(n+1)^2$,展开后会计算三个部分,比计算两个部分复杂。)原式 $=(1^3+2^3+\cdots+20^3)-(1^2+2^2+\cdots+20^2)=\left(\frac{21\times20}{2}\right)^2-\frac{20\times21\times(2\times20+1)}{6}=41230$。

秘籍5　放缩法综合运用

例5　把一堆苹果分给 n 个孩子,若每人分3个,则多8个;若每人分5个,则最后一个得到的苹果少于3个,问有多少个孩子?有多少个苹果?

分析　由每人分3个,则多8个知道苹果的总数为 $3n+8$。每人分5个,若最后一个同学拿到3个苹果,那么此时会比苹果总数多,即 $5(n-1)+3>3n+8$,即 $n>5$;若最后一个同学分到的苹果数目为0,则有 $3n+8>5(n-1)$,即 $n<6.5$。由 $5<n<6.5$ 知道 $n=6$,即有6个孩子,从而苹果的总数是 $6\times3+8=26$(个)。

秘籍6　归纳递推与解方程的结合

例6　（1）平面上有若干条直线,已知这些直线最多能形成190个交点,则有多少条直线?

分析 平面上 2 条直线最多 1 个交点;3 条直线最多 $1+2=3$ 个交点;4 条直线最多 $1+2+3=6$ 个交点……以此类推,平面上 n 条直线最多 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ 个交点。(这里还可以用排列组合来求交点个数,设平面上有 n 条直线,则这些直线最多能形成 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ 个交点),于是 $n(n-1)=380=20\times19$,所以 $n=20$,即平面上有 20 条直线。

(2) 平面上有若干条直线,这些直线最多能形成 n 个交点,且最多能把平面分成 m 个部分,已知 m 比 n 大 1001,问有多少条直线?

分析 平面上 1 条直线最多把平面分成两个部分;2 条直线最多分成 $2+2=4$ 个部分;3 条直线最多分成 $2+2+3=7$ 个部分;4 条直线最多分成 $2+2+3+4=11$ 个部分……以此类推,平面上 x 条直线最多可将平面分成 $2+2+3+4+\cdots+x=1+\frac{x(x+1)}{2}$ 个部分。则有 $n=\frac{x(x-1)}{2}$,$m=1+\frac{x(x+1)}{2}$,由题意得 $1+\frac{x(x+1)}{2}-\frac{x(x-1)}{2}=1001$,即 $x+1=1001$,$x=1000$,所以有 1000 条直线。

秘籍修炼

练 1 (1)定义 $a⊛b=a^b$,求 $2⊛(2⊛1)$ 的值。

(2)定义 $x\ \$\ y=\frac{x-y}{y}$,求 $(30\ \$\ 14)\times(16\ \$\ 2)$ 的值。

练 2 (1)把下面的比化成最简整数比 $\frac{1}{6}:\frac{1}{7}:\frac{1}{8}=$ ________。

(2)$x:y=2:3$,$y:z=7:4$,则 $x:y:z=$ ________。

练 3 (1)解方程组 $\begin{cases}5x-2y=11\\3x+4y=43\end{cases}$

(2)解方程组 $\begin{cases}(2x+3y):3=(x+y):\frac{7}{6}\\\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y=3\end{cases}$

练 4　(1)计算$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1024}\right)$

(2)计算 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+25)$

练 5　求繁分数$\dfrac{1}{\frac{1}{1991}+\frac{1}{1992}+\cdots+\frac{1}{2000}}$的整数部分。

练 6　(1)平面上 8 条直线可形成多少个交点？最多能把平面分成几个部分？

(2)平面上有若干条直线，若这些直线最多能形成 n 个交点，最多能把平面分成 m 个部分，已知 $m-n=9$，有多少条直线？

答案与提示

第1讲 分数的运算技巧(1)

秘籍修炼

练1 (1)原式 $=\frac{4}{7}\times(0.8+0.6)$

$=\frac{4}{7}\times1.4$

$=0.8$

(2)原式 $=2.5\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times1.5$

$=\frac{1}{4}\times(2.5+1.5)$

$=\frac{1}{4}\times4$

$=1$

练2 (1)原式 $=\frac{16}{17}\times16+\frac{16}{17}\times1$

$=\frac{16}{17}\times(16+1)$

$=\frac{16}{17}\times17$

$=16$

(2)原式 $=\frac{13}{12}\times8+\frac{11}{12}\times8$

$=\left(\frac{13}{12}+\frac{11}{12}\right)\times8$

$=\frac{24}{12}\times8$

$=16$

练3 (1)原式 $=3.27\times\frac{3}{7}+3.27\times\frac{4}{7}$

$=3.27\times\left(\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)$

$=3.27\times1$

$=3.27$

(2)原式 $=\frac{4}{5}\times7.5+2.5\times\frac{4}{5}$

$=\frac{4}{5}\times(7.5+2.5)$

$=\frac{4}{5}\times10$

$=8$

练4 原式 $=\frac{1}{5}\times7\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}-\frac{1}{5}\times3$

$=\frac{1}{5}\times\left(7\frac{1}{6}+\frac{5}{6}-3\right)$

$=\frac{1}{5}\times5$

$=1$

练5 原式 $=0.4\times5.2+0.4\times2.2+0.4\times2.6$

$=0.4\times(5.2+2.2+2.6)$

$=0.4\times10$

$=4$

练6 原式 $=\frac{7}{12}\times\left(\frac{29}{19}-\frac{12}{19}\right)+\frac{17}{19}\times\frac{5}{12}$

$=\frac{7}{12}\times\frac{17}{19}+\frac{17}{19}\times\frac{5}{12}$

$=\frac{17}{19}\times\left(\frac{7}{12}+\frac{5}{12}\right)$

$=\frac{17}{19}\times1$

$=\frac{17}{19}$

第2讲 分数的运算技巧(2)

秘籍修炼

练1 (1)原式 $=\left(4\frac{3}{4}+8\frac{1}{4}\right)-9$

$=13-9$

$=4$

(2)原式 $=5\frac{6}{7}-\frac{1}{2}-\frac{6}{7}$

$=5\frac{6}{7}-\frac{6}{7}-\frac{1}{2}$

$$=5-\frac{1}{2}$$

$$=4\frac{1}{2}$$

练 2 （1）原式 $=(124-1)\times\frac{99}{124}$

$$=124\times\frac{99}{124}-1\times\frac{99}{124}$$

$$=99-\frac{99}{124}$$

$$=98\frac{25}{124}$$

（2）原式 $=2014\times\frac{2012}{2011}$

$$=2014\times\left(1+\frac{1}{2011}\right)$$

$$=2014\times1+2014\times\frac{1}{2011}$$

$$=2014+\frac{2014}{2011}$$

$$=2015\frac{3}{2011}$$

练 3 原式 $=\left(\frac{104}{99}+\frac{104}{33}+\frac{104}{11}\right)\div\left(\frac{100}{99}+\frac{100}{33}+\frac{100}{11}\right)$

$$=\left[104\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{33}+\frac{1}{11}\right)\right]\div\left[100\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{33}+\frac{1}{11}\right)\right]$$

$$=[104\times1]\div[100\times1]$$

$$=1.04$$

练 4 原式 $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2013}{2014}=\frac{1}{2014}$

练 5 原式 $=\frac{1+3+5+7+\cdots+99}{2+6+10+14+\cdots+198}$

$$=\frac{1+3+5+7+\cdots+99}{2\times(1+3+5+7+\cdots+99)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

练 6 原式 $=\frac{1\times3\times(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)}{1\times2\times(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)}$

$$=\frac{1\times3}{1\times2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

第 3 讲　分数裂项

秘籍修炼

练 1 原式 $=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{96}-\frac{1}{98}+\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=\frac{49}{200}$$

练 2 原式 $=2\times\left(\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\frac{1}{10\times13}+\cdots+\frac{1}{97\times100}\right)$

$$=2\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{1\times4}+\frac{3}{4\times7}+\frac{3}{7\times10}+\frac{3}{10\times13}+\cdots+\frac{3}{97\times100}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=\frac{33}{50}$$

练 3 首先整数部分与分数部分分开计算，其次分数部分的分母变化为两个数的乘积形式。

原式 $=(1+3+5+7+9+11+13+15+17)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}\right)$

$$=9^2+\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}\right)$$

$$=81+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)$$

$$=81\frac{2}{5}$$

练 4 当分母为三个数相乘时，如果分子正好等于分母首尾两个数之差就可以裂差，裂开后分母前两项乘积减去后两项乘积。

$$原式=\frac{3-1}{1\times2\times3}+\frac{4-2}{2\times3\times4}+\frac{5-3}{3\times4\times5}+\frac{6-4}{4\times5\times6}+\cdots+\frac{10-8}{8\times9\times10}+\frac{11-9}{9\times10\times11}$$

$$=\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{9\times10}-\frac{1}{10\times11}$$

$$=\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{10\times11}$$

$$=\frac{27}{55}$$

练 5 $原式=7\times\left(\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}+\frac{15}{56}\right)$

$$=7\times\left(\frac{3+4}{3\times4}-\frac{4+5}{4\times5}+\frac{5+6}{5\times6}-\frac{6+7}{6\times7}+\frac{7+8}{7\times8}\right)$$

$$=7\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$=7\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{77}{24}$$

练 6 $原式=\frac{1}{1}-\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2}-\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+9}-\frac{1}{1+2+3\cdots+10}$

$$=1-\frac{1}{55}$$

$$=\frac{54}{55}$$

第 4 讲　繁分数

秘籍修炼

练 1 (1) $原式=\frac{1}{2}\div3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(2) $原式=4\div\frac{2}{5}=4\times\frac{5}{2}=10$

练 2 (1) $原式=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\times4$

$$=\frac{4}{3}$$

(2) $原式=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{19}{8}}=\frac{\frac{5}{4}\times8}{\frac{19}{8}\times8}=\frac{10}{19}$

练 3 (1) $原式=\frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{12}}=\frac{\frac{17}{12}\times12}{\frac{1}{12}\times12}=17$

(2) $原式=\frac{48\times36}{72\times72}=\frac{1}{3}$

练 4

$$原式=\frac{\frac{72}{5}+\frac{184}{7}+\frac{328}{9}}{\frac{9}{5}+\frac{23}{7}+\frac{41}{9}}$$

$$=\frac{8\times\left(\frac{9}{5}+\frac{23}{7}+\frac{41}{9}\right)}{\frac{9}{5}+\frac{23}{7}+\frac{41}{9}}$$

$$=\frac{8}{1}=8$$

练 5 $原式=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}=\frac{4}{13}$

练 6 $原式=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}=\frac{4}{9}$

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}=\frac{1}{4}$$

$\frac{1}{x}=1$

$x=1$

第5讲　换元法

秘籍修炼

练1　设 $a=2014$

原式 $=\frac{a^2}{(a-1)\times(a+1)+1}$

$=\frac{a^2}{a^2-1+1}=1$

练2　设 $2014=a,3411=b$

原式 $=(a+1)b-a(b+1)$

$=ab+b-ab-a$

$=b-a$

$=3411-2014$

$=1397$

练3　设 $a=0.1+0.21+0.321+0.4321$,

$b=0.21+0.321+0.4321$

原式 $=a\times(b+0.54321)-(a+0.54321)\times b$

$=0.54321\times(a-b)$

$=0.054321$

练4　设 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

原式 $=(1+a)\times\left(a+\frac{1}{5}\right)-\left(1+a+\frac{1}{5}\right)\times a$

$=a+\frac{1}{5}+a^2+\frac{a}{5}-a-a^2-\frac{a}{5}$

$=\frac{1}{5}$

练5　设 $a=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$;

$b=\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$

原式 $=a\times\left(b+\frac{1}{13}\right)-\left(a+\frac{1}{13}\right)\times b$

$=ab+\frac{a}{13}-ab-\frac{b}{13}$

$=\frac{1}{13}\times(a-b)$

$=\frac{1}{13}\times\frac{1}{5}$

$=\frac{1}{65}$

练6　设 $a=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2015}}}}$

原式 $=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}=\frac{1}{1+a}+\frac{a}{a+1}$

$=\frac{a+1}{a+1}=1$

第6讲　公式类的计算

秘籍修炼

练1　原式 $=\frac{50\times(50+1)}{2}=1275$

练2　原式 $=\frac{50\times(50+1)\times(2\times50+1)}{6}$

$=42925$

练3　原式 $=(1^2+2^2+3^2+\cdots+60^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+40^2)$

$=\frac{60\times(60+1)\times(2\times60+1)}{6}-\frac{40\times(40+1)\times(2\times40+1)}{6}$

$=73810-22140$

$=51670$

练4　原式 $=(1^2+2^2+3^2+\cdots+50^2)-(2^2+4^2+6^2+\cdots+50^2)$

$=\frac{50\times(50+1)\times(2\times50+1)}{6}-2^2\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+25^2)$

$=42925-22100$

$=20825$

练5　原式 $=(1+2+3+\cdots+24)^2=300^2$

$=90000$

练6　原式 $=(1^3+2^3+3^3+\cdots+40^3)-(2^3+4^3+6^3+\cdots+40^3)$

$=(1+2+3+4+\cdots+40)^2-2^3\times(1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3)$

$=672400-8\times44100$

$=319600$

第7讲 整数裂项

秘籍修炼

练1 原式 $=\dfrac{49\times50\times51-0\times1\times2}{1\times3}$

$=\dfrac{49\times50\times51}{1\times3}$

$=41650$

练2 原式 $=1\times4+\dfrac{49\times52\times55-1\times4\times7}{3\times3}$

$=4+15568$

$=15572$

练3 原式 $=\dfrac{9\times10\times11\times12-0\times1\times2\times3}{1\times4}$

$=\dfrac{9\times10\times11\times12}{1\times4}$

$=2970$

练4 原式 $=1\times3\times5+$

$\dfrac{17\times19\times21\times23-1\times3\times5\times7}{2\times4}$

$=15+19488$

$=19503$

练5 原式 $=\dfrac{1}{24}\times(69\times75\times81\times87-3\times9\times$

$15\times21)$

$=1519155$

练6

原式 $=$

$\dfrac{9\times10\times11\times12\times13-0\times1\times2\times3\times4}{1\times5}$

$=\dfrac{9\times10\times11\times12\times13}{1\times5}$

$=30888$

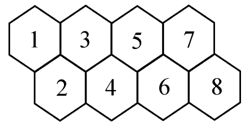
第8讲 归纳与递推

秘籍修炼

练1 这是斐波那契数列变形题目,规律是从第三个数开始每个数都是与它相邻的前三个数的和。1,1,1,3,5,9,17,31,57,105。

练2 斐波那契数列变形题目,相当于8级台阶,每一步可以登上1级或者2级台阶,登上8级台阶有多少种不同的方法?规律是从第2个数开始每个数都是与它相邻的前2个数的和。1,2,3,5,8,13,21,34。

练3



1号走到2号房间有1种方法;

1号走到3号房间有2种方法:(1−2,1−3);

1号走到4号房间有3种方法:(1−2−3−4,1−2−4,1−3−4);

……

以此类推:1,2,3,5,8,13,21,34。

1号走到8号房间有34种方法。

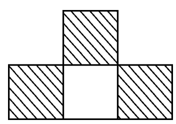
练4

通项归纳:

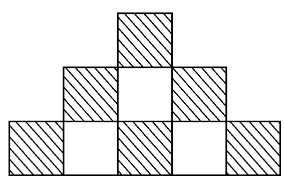
$\dfrac{(2n)^2}{(2n+1)^2-1}=\dfrac{2n\times2n}{2n\times(2n+2)}=\dfrac{n}{n+1}$

原式 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{1006}{1007}=\dfrac{1}{1007}$

练5 把图形进行黑白相间染色:



第一个图,有$(1+2)=3$个阴影正方形,共用$3\times4=12$根,再加上底层白色正方形下面1根,列式为$(1+2)\times4+1=13$根。



第二个图,有$(1+2+3)=6$个阴影正方形,共用$6\times4=24$根,再加上底层白色正方形下面2根,列式为(1+2+

3）×4 +2 =26 根。

依次类推，当第 n 个图形时，列式为 $[1+2+3+\cdots n+1)]\times 4+n$

此题估算一下，若 $n=5$ 时，$(1+2+3+4+5+6)\times 4+5=89$，

若 $n=4$ 时，$(1+2+3+4+5)\times 4+4=64$，

若 $n=3$ 时，$(1+2+3+4)\times 4+3=43$。

如果围成的图形共用了 60 多根小棍，那么围成的图形共用了 64 根小棍。

练 6 先移动"1、2"两个盘子移到 B 柱，需 3 步。再把 4 号盘子移到 C 柱需 1 步，把 3 号盘子移到 C 柱需 1 步，最后移动"1、2"两个盘子移到 C 柱，需 3 步。一共需 3 +1 +1 +3 =8 步。

第 9 讲　比与比例

秘籍修炼

练 1 (1)$1.5:3.7=15:37$

(2)$\frac{2}{15}:\frac{8}{27}=9:20$

(3)$3.2:\frac{8}{15}=6:1$

练 2 $A:\boxed{B}=3:7=6:\boxed{14}$

$\boxed{B}:C=2:3=\boxed{14}:21$

$A:B:C=6:14:21$

练 3 (1)因为 $1\times 12=2\times 6=12$，所以 1，6，12 和 2 可以组成比例。

$1:2=6:12$

$1:6=2:12$

$2:1=12:6$

$2:12=1:6$

$6:1=12:2$

$6:12=1:2$

$12:6=2:1$

$12:2=6:1$

(2)因为 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}$，所以 $\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{5}$ 和 $\frac{1}{4}$ 可以组成比例。

$\frac{2}{5}:\frac{4}{5}=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$

$\frac{2}{5}:\frac{1}{4}=\frac{4}{5}:\frac{1}{2}$

$\frac{4}{5}:\frac{2}{5}=\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$

$\frac{4}{5}:\frac{1}{2}=\frac{2}{5}:\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}:\frac{2}{5}=\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$

$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{2}{5}:\frac{4}{5}$

$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=\frac{4}{5}:\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}:\frac{4}{5}=\frac{1}{4}:\frac{2}{5}$

练 4 $2x=9\times\frac{1}{2}$

$x=\frac{9}{4}$

练 5 $\frac{2}{3}x=4\times 25$

$x=150$

练 6 $25x=60$

$x=\frac{12}{5}$

第 10 讲　解分数系数方程

秘籍修炼

练 1 $x=11$

练 2 $\frac{x}{5}\times 40-\frac{x}{8}\times 40=6\times 40$

$8x-5x=240$

$3x=240$

$x=80$

练 3 $(5y-1)\times 3=6\times 7$

$15y-3=42$

$15y=45$

$y=3$

练 4 $\frac{x+4}{3}\times 6-\frac{3-x}{2}\times 6=1\times 6$

$(x+4)\times 2-(3-x)\times 3=6$

$$2x+8-9+3x=6$$
$$5x-1=6$$
$$5x=7$$
$$x=\frac{7}{5}$$

练 5 $\frac{x-11}{x+23}=\frac{1}{3}$

$$(x-11)\times3=(x+23)\times1$$
$$3x-33=x+23$$
$$3x-x=33+23$$
$$2x=56$$
$$x=28$$

练 6 $\frac{5x-4}{4}=1+\frac{2x+1}{3}$

$$\frac{5x-4}{4}\times12=1\times12+\frac{2x+1}{3}\times12$$
$$(5x-4)\times3=12+(2x+1)\times4$$
$$15x-12=12+8x+4$$
$$15x-12=16+8x$$
$$15x-8x=16+12$$
$$7x=28$$
$$x=4$$

第 11 讲　解方程组

秘籍修炼

练 1　解得 $\begin{cases}x=\frac{19}{5}\\ y=\frac{12}{5}\end{cases}$

练 2　解得 $\begin{cases}x=7\\ y=1\end{cases}$

练 3　解得 $\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$

练 4　解得 $\begin{cases}x=6\\ y=2\end{cases}$

练 5　解得 $\begin{cases}x=7\\ y=3\end{cases}$

练 6　解得 $\begin{cases}x=10\\ y=15\\ z=10\end{cases}$

第 12 讲　定义新运算

秘籍修炼

练 1　(1)原式 $=\left(\frac{16}{17}+\frac{3}{11}\right)-\left(\frac{16}{17}-\frac{3}{11}\right)$

$$=\frac{3}{11}+\frac{3}{11}$$
$$=\frac{6}{11}$$

(2)原式 $=\left(\frac{11}{12}+\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{11}{12}-\frac{4}{5}\right)$

$$=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}$$
$$=\frac{8}{5}$$

练 2　原式 $=\dfrac{\frac{7}{8}-\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}+\frac{7}{8}}=\dfrac{\frac{3}{40}}{\frac{67}{40}}=\frac{3}{40}\times\frac{40}{67}=\frac{3}{67}$

练 3　原式 $=\frac{1}{2}\blacklozenge\left(\dfrac{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}{2}\right)=\frac{1}{2}\blacklozenge\frac{1}{4}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{2}$$
$$=\frac{1}{16}$$

练 4　(1)原式 $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$

$$=\frac{1}{120}+\frac{1}{60}$$
$$=\frac{1}{40}$$

(2)原式 $=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}$

$$=\frac{1}{60}-\frac{1}{120}$$
$$=\frac{1}{120}$$

练 5 $4\frac{2}{3}※\left(3x+2\times\frac{3}{4}\right)=21$

$$3\times\frac{14}{3}+2\times\left(3x+2\times\frac{3}{4}\right)=21$$

$$x=\frac{2}{3}$$

练 6 $\frac{1}{4}\triangledown\frac{2}{3}=\dfrac{6\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}}{m\times\frac{1}{4}+2\times\frac{2}{3}}=\frac{6}{11}$

$m=2$

$\frac{3}{5}\triangledown\frac{5}{8}=\dfrac{6\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}}{2\times\frac{3}{5}+2\times\frac{5}{8}}=\frac{45}{49}$

第 13 讲　用放缩法估值

秘籍修炼

练 1 (1) $6.03\times1.22<6.02\times1.23<6.01\times1.24$

令 $6.01\times1.24+6.02\times1.23+6.03\times1.22=A$

$A<6.01\times1.24\times3<6\times1.25\times3=22.5$

$A>6\times(1.24+1.23+1.22)=6\times3.69=22.14$

所以原式的整数部分是 22。

(2) 令 $A=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{19}$

$A>\frac{1}{19}\times10=\frac{10}{19}$

$A<\frac{1}{10}\times10=1$

所以原式的整数部分是 0。

练 2 令　分母 $=A$，先缩小 $A>\frac{1}{3015}\times5=\frac{5}{3015}=\frac{1}{603}$

再放大，$A<\frac{1}{3011}\times5=\frac{5}{3011}$

则　原式 $=\frac{1}{A}$

$\frac{3011}{5}<\frac{1}{A}<\frac{3015}{5}$

$602.2<\frac{1}{A}<603$

所以原式的整数部分是 602。

练 3

原式 $=(1+2+3+\cdots+11)+\left(\frac{20}{100}+\frac{20}{101}+\frac{20}{102}+\cdots+\frac{20}{110}\right)$

$=66+\left(\frac{20}{100}+\frac{20}{101}+\frac{20}{102}+\cdots+\frac{20}{110}\right)$

令原式 $=A$

$A>66+\frac{20}{110}\times11=68$

$A<66+\frac{20}{100}\times11=68.2$

所以原式的整数部分是 68。

练 4 原式 $=\left(1-\frac{1}{21}\right)+\left(1-\frac{1}{22}\right)+\left(1-\frac{1}{23}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{29}\right)+\left(1-\frac{1}{30}\right)$

$=10-\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\cdots+\frac{1}{30}\right)$

令原式 $=A$

$A>10-\frac{1}{21}\times10=9\frac{11}{21}$

$A<10-\frac{1}{30}\times10=9\frac{2}{3}$

所以原式的整数部分是 9。

练 5 原式 $=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)$

$<\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{4}\times4+\frac{1}{8}\times8=3$

再把结果缩小，

原式 $=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right.$

$+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\Big)$

$>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\times4+\frac{1}{16}\times8$

$>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$

所以原式的整数部分是2。

练 6 原式 $=\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{55}\right)+\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{54}\right)+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{53}\right)+\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{52}\right)+\left(\frac{1}{22}+\frac{1}{51}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{35}+\frac{1}{38}\right)+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{37}\right)$

$\frac{1}{18}+\frac{1}{55}=\frac{18+55}{18\times55}=\frac{73}{18\times55}$

$\frac{1}{19}+\frac{1}{54}=\frac{19+54}{19\times54}=\frac{73}{19\times54}$

$\frac{1}{20}+\frac{1}{53}=\frac{20+53}{20\times53}=\frac{73}{20\times53}$

$\frac{1}{21}+\frac{1}{52}=\frac{21+52}{21\times52}=\frac{73}{21\times52}$

$\frac{1}{22}+\frac{1}{51}=\frac{22+51}{22\times51}=\frac{73}{22\times51}$

…

$\frac{1}{36}+\frac{1}{37}=\frac{36+37}{36\times37}=\frac{73}{36\times37}$

两数和一定，差越小积越大，则有

$18\times55<19\times54<20\times53<21\times52<22\times51<\cdots<36\times37$

分子相同，分母越小则分数越大，

那么$\frac{1}{18}+\frac{1}{55}>\frac{1}{19}+\frac{1}{54}>\frac{1}{20}+\frac{1}{53}>\cdots>\frac{1}{36}+\frac{1}{37}$

所以$\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{37}\right)\times19<\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\cdots+\frac{1}{53}+\frac{1}{54}+\frac{1}{55}<\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{55}\right)\times19$

所以 $1<\frac{1387}{1332}<\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\cdots+\frac{1}{53}+\frac{1}{54}+\frac{1}{55}<\frac{1387}{990}<2$

所以原式的整数部分是1。

第14讲 综合训练(1)

秘籍修炼

练 1 原式 $=(40+1)\times\frac{27}{40}$

$=40\times\frac{27}{40}+1\times\frac{27}{40}$

$=27+\frac{27}{40}$

$=27\frac{27}{40}$

练 2 原式 $=10+100+1000+1\underbrace{0\cdots0}_{10个“0”}-\frac{1}{2}\times10$

$=\underbrace{11\cdots1}_{10个“1”}0-5$

$=\underbrace{11\cdots1}_{9个“1”}05$

练 3 原式 $=2.5\times(4\times0.8)\times12.5$

$=(2.5\times4)\times(0.8\times12.5)$

$=10\times10$

$=100$

练 4 令 $x=87.6+31.2$，

$y=87.6+31.2+91.8$

原式 $=(10+x)\times y-(10+y)\times x$

$=10y+xy-10x-xy$

$=10(y-x)$

$=10\times91.8$

$=918$

练 5 原式 $=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{52}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{52}\right)$

$=\frac{17}{52}$

练 6 原式 $=\frac{2^2-1^2}{1^2\times2^2}+\frac{3^2-2^2}{2^2\times3^2}+\frac{4^2-3^2}{3^2\times4^2}+\cdots+\frac{8^2-7^2}{7^2\times8^2}$

$=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}$

$=1-\frac{1}{8^2}$

$=\frac{63}{64}$

第15讲　综合训练(2)

秘籍修炼

练1　(1)原式 $=2 \circledast 2^1=2^2=4$

(2)原式 $=\frac{30-14}{14}\times\frac{16-2}{2}=\frac{16}{14}\times\frac{14}{2}$

$=8$

练2　(1)比的各项同时乘以6,7,8的最小公倍数168得28∶24∶21

(2)y要变为3和7的最小公倍数21,由比的性质得$x∶y∶z=14∶21∶12$

练3　(1)$\begin{cases}5x-2y=11 & ①\\ 3x+4y=43 & ②\end{cases}$

②$+2\times$①得$13x=65$,即$x=5$。再把$x=5$代入①式中得$y=7$。所以原方程组的解为$\begin{cases}x=5,\\ y=7。\end{cases}$

(2)$\begin{cases}(2x+3y):\ 3=(x+y):\ \frac{7}{6} & ①\\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y=3 & ②\end{cases}$

利用比例的性质可把①式化为$4x=3y$　③,②式等号两边同时乘以12化简为$8x+3y=36$　④,用代入消元法解得$\begin{cases}x=3,\\ y=4。\end{cases}$

练4　(1)通项公式

$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

$=1-\frac{1}{2^n}$

原式$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=1\times10-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}\right)$

$=10-\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$

$=9\frac{1}{1024}$

(2)通项公式$a_n=1+2+3+\cdots+n$

$=\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}(n^2+n)$

原式$=a_1+a_2+a_3+\cdots a_{25}$

$=\frac{1}{2}[(1^2+2^2+3^2+\cdots+25^2)+(1+2+3+\cdots+25)]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{25\times26\times(2\times25+1)}{6}+\frac{26\times25}{2}\right]$

$=2925$

练5　(1)原式 $>\dfrac{1}{\frac{1}{1991}+\frac{1}{1991}+\cdots\frac{1}{1991}}$

$=\dfrac{1}{\frac{10}{1991}}=199.1$

同时,原式 $<\dfrac{1}{\frac{1}{2000}+\frac{1}{2000}+\cdots+\frac{1}{2000}}$

$=\dfrac{1}{\frac{10}{2000}}=200$,所以原式的整数部分是199。

练6　(1)8条直线最多形成$\frac{8\times7}{2}=28$个交点,最多把平面分成$1+\frac{8\times9}{2}=37$个部分。

(2)设有x条直线,则$n=\frac{x(x-1)}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$,$m=1+\frac{x(x+1)}{2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$,则$m-n=x+1=9$,所以$x=8$,即有8条直线。